



پارادوکس اطلاعات در سیاه چاله

مربوط به درس پروژه:

استاد محترم جناب دکتر رحیمی کشاری

نویسنده:

شعرا جعفری تبار

سال تحصیلی:

1399-1400

فصل ۱: مقدمه

پارادوکس اطلاعات ممکن است در آینده یکی از تعارضات تعیین کننده در اصول فیزیک مدرن قرار گیرد. پارادوکس ها که در علوم طبیعی و ریاضیات سابقه ای طولانی و جذاب دارند معمولاً یا از مفاهیمی ناشی می شوند که در اصل پارادوکس نیستند (مثل "پارادوکس دوقلو" از نسبیت خاص) و یا از تناقض میان نظریه ها حاصل شده اند. مثلاً پارادوکس بزرگ قرن بیستم، فاجعه ماورافرا بنفش، از تعارض نظریه ترمودینامیک آماری کلاسیک و نظریه ی میدان الکترومغناطیسی حاصل آمده است که در نهایت ما را به پیدایش نظریه کوانتوم نزدیک کرد. همچنین، آلبرت انیشتین با استفاده از تعارض میان دو نظریه نسبیت گالیله و الکترودینامیک کلاسیک نظریه نسبیت خاص را مطرح کرد. در هر یک از این موارد، این تضاد افکار و ناپیوستگی های آشکار میان آنهاست که شرایط را برای رشد ایده های جدید و عمیق بیشتر فراهم کرده است.

پارادوکس اطلاعات سیاهچاله نتیجه تناقض بین نسبیت عام و مکانیک کوانتوم است و اغلب از آن به عنوان "بحران جدی" و احتمالاً مهمترین مسئله فیزیک بنیادی امروز یاد می کنند. اما قبل از بحث درباره پارادوکس با جزئیات بیشتر، بیایید نگاهی به تاریخچه مختصر سیاهچاله ها بیندازیم.

سیاهچاله جرمی است عظیم که آنچنان میدان گرانشی ای تولید می کند که حتی از فرار نور جلوگیری می کند. اندازه سیاهچاله با توجه به اندازه افق رویداد آن تعریف می شود و هر آن چیزی که از آن رد شود، هرگز دیگر نمی تواند از آن فرار کند مگر به عنوان اطلاعات احتمالی؛ به این مطلب بعداً خواهیم پرداخت.

اولین اشاره به سیاه چاله ها در اواخر قرن هجدهم رخ داد؛ زمانی که کشیش جان میشل دریافت که اگر یک ستاره به اندازه کافی جرم داشته باشد، سرعت فرار آن از سرعت نور فراتر خواهد رفت. تقریباً همزمان با میشل، پیر سیمون لاپلاس نتیجه ای مشابه کشف کرد و آن را در مبنای ریاضیات قرار داد. در قرن نوزدهم، نظریه ذره ای بودن نور که نیوتن به آن معتقد بود، از دور خارج شد و تئوری موجی نور جایگزین آن گردید؛ نظریه ای که بر اساس کارهای کریستین هوینگنس بنیان نهاده شده بود.

با منتشر شدن نظریه نسبیت عام انیشتین و راه حل متریک خلا کارل شوارتزشیلد، هندسه سیاهچاله و ویژگی های آن (مانند افق رویداد) اندازه گیری و مورد مطالعه قرار گرفت. با وجود این، انیشتین و برخی دیگر از باور به وجود سیاهچاله ها امتناع ورزیدند. انیشتین به این ایده پرداخت که چگونه اجرام عظیم (مانند ستارگان) هرگز نمی توانند تا حدی متراکم شوند که باعث ایجاد سیاهچاله و تکینگی در بافت فضا-زمان شوند.

تا دهه ۱۹۲۰ ستاره های کوتوله سفید با چگالی بالا کشف شده بودند و حد بالا برای جرم آنها (حد چاندرا سار) به دست آمده بود. پس از آن دانشمندان به این بررسی پرداختند که برای یک ستاره با جرمی که از این حد فراتر

رود چه اتفاقی می افتد. اوپنهاایمر، ولوکوف و اسنایدر در سال ۱۹۳۹، با استفاده از معادلات میدانی اینشتین و متریک شوارتزشیلد، بیان کردند که اگر یک گلوله گاز به اندازه کافی جرم داشته باشد، گاز بی نهایت متراکم می شود و تکینگی ای بی نهایت چگال و یک افق رویداد به وجود می آورد. همین مطلب زمینه را برای تحقیقات بیشتر و باور به وجود سیاهچاله ها در دهه ۱۹۶۰ فراهم آورد.

در آغاز دهه ۱۹۷۰، تئوری کوانتوم با نظریه نسبیت عام کلاسیک سیاهچاله ها ترکیب شد. در طول این مدت، هر چهار قانون ترمودینامیک کلاسیک مشابه قوانینی بود که برای توصیف سیاهچاله ها تدوین شده بود. جالب ترین نکته آن بود که قانون دوم کلی ارائه شده توسط بکنشتاین، آنتروپی یک سیاهچاله را متناسب با مساحت افق آن به دست آورد. نظریه ی استفان هاوکینگ نیز در سال ۱۹۷۴، که سیاهچاله ها از خودشان تابش ساطع میکنند، نظریه ای انقلابی بود که رابطه بین فیزیک سیاهچاله و ترمودینامیک را تقویت کرد.

مقالات استیون هاوکینگ در مورد تابش از سیاهچاله ها حاکی از آن است که اطلاعات ذاتی که در سیاهچاله قرار دارد برای همیشه از دست خواهد رفت و در اثر تابش جسم سیاه آنقدر تابش خواهد یافت تا سیاهچاله در نهایت کاملاً تبخیر شود؛ نتیجه ای که با نظریه کوانتوم سازگار نبود.

برخی از فیزیکدانان برجسته حاضر بودند که اصل بقای اطلاعات را کنار بگذارند اما برخی دیگر این موضوع را رد کردند. در مکانیک کوانتوم اعتقاد بر این است که تکامل حالت کوانتومی باید توسط یک عملگر یکانی و برگشت پذیر تعیین شود. بسیاری از ایده ها پس از تابش هاوکینگ مطرح شد که سعی در یافتن روشهایی برای حفظ اطلاعات هنگام تبخیر سیاهچاله داشت.

در اوایل دهه ۱۹۹۰، یک راه حل امیدوار کننده به شکل "مکمل" ظاهر شد که بیان می کرد اطلاعاتی که در یک سیاهچاله قرار می گیرند هم از افق رویداد عبور می کنند و هم از آن باز می گردند تا سرانجام توسط یک ناظر خارجی جمع آوری شوند. این ایده تناقض نیست زیرا هیچ ناظری نمی تواند اطلاعات منتشر شده درونی و بیرونی را تشخیص دهد. با وجود این، مشکلات مفهومی همچنان پابرجا بود و در سال ۲۰۱۳ پارادوکس AMPS، فایروال، نشان داد که مکمل بودن، این نتیجه عجیب را به همراه دارد که در افق رویداد باید یک لایه کوانتای پرانرژی، یک فایروال، وجود داشته باشد که هر ناظری را که وارد میشود را آتش بزند. در حالی که اصل هم ارزی نسبیت عام نشان می دهد که یک ناظر هنگام افتادن در افق رویداد هیچ چیز عجیبی را احساس نمی کند که این بر خلاف دیوار آتش است.

در ابتدا باید مختصراً به بررسی خصوصیات اساسی سیاهچاله ها و ریاضیات آنها بپردازیم. سپس در ادامه به تابش هاوکینگ نگاهی کوتاه می کنیم و سپس به دنبال آن بحثی مختصر درباره تئوری اطلاعات و بیان دقیق پارادوکس

اطلاعات درخواستی انداخت. قسمت پایانی کار بررسی و ارزیابی راه‌های اصلی پارادوکسی است که تاکنون ارائه شده است.

فصل ۲: سیاهچاله ها

۲.۱ خصوصیات اساسی سیاهچاله ها:

در این بخش، نخست با مطالعه ویژگی های اساسی سیاهچاله ها شروع می کنیم و در ادامه به متریک ریندلر می پردازیم. روشهای استفاده شده در این فصل بر مبنای: کارول [1] و والد [2] خواهند بود.

مطالعه یک سیاهچاله در نسبیت عام را می توان در سیستم های مختصات متفاوت دنبال کرد که برخی از آنها دارای تکینگی هستند و، به عبارت دیگر، از نظر ریاضی نقاطی تعریف نشده در فضا زمان تلقی می شوند.

متریک شوارتزشیلد یکی از اولین و مهمترین سیستم های مختصات برای توزیع جرم در تقارن کروی و در خلا است و با استفاده از آن می توان معادلات میدان اینشتین را به دست آورد. متریک شوارتزشیلد به شکل زیر است: [۱]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.1)$$

که در آن r مختصات شعاعی است (از صفر تا بی نهایت)، θ زاویه قطبی، φ زاویه آزیموتال، M جرم سیاهچاله و t مختصه ی زمان.

در ادامه خواهیم دید که چگونه این مختصات لزوماً نشان دهنده کمیت های فیزیکی نیستند. در سیستم های مختصاتی که بررسی خواهیم کرد تکینگی فیزیکی در مرکز سیاهچاله ها مطابق با بی نهایت است. با یافتن اندازه ثابت ناوردای انحنای فضا-زمان مانند اسکالر کرچمان، میتوان تکینگی ها را کمیتی «فیزیکی» در نظر گرفت نه حاصل ریاضیات. این ثابت از دو تانسور انحنای ریمان تشکیل شده است:

$$K = R_{abcd}R^{abcd} \quad (2.2)$$

برای سیاهچاله شوارتزشیلد مقدار آن $K = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}$ است [3]. با میل دادن r به سمت صفر میتوان دید که K واگرا می شود که البته کاملاً قابل انتظار است زیرا مرکز سیاه چاله دارای چگالی ای بی نهایت است.

با نگاهی سریع به (۲.۱) مشخص می شود که دو تکینگی وجود دارد: یکی در $r = 0$ ، و دیگری در $r = \frac{2GM}{c^2}$ که به شعاع شوارتزشیلد (یا شعاع افق رویداد) معروف است. شعاع شوارتزشیلد یک تکینگی فیزیکی نیست بلکه فقط یک ویژگی متریک است. با توجه به قضیه بیرخوف [1]، متریک شوارتزشیلد راه حل یکتا و متقارن کروی برای معادلات میدان خلا اینشتین است.

معادلات میدان انیشتین (با ثابت کیهانی صفر): [1]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

با ضرب هر دو طرف معادلات میدان در $g^{\mu\nu}$ ، و با استفاده از $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R$ ، $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T$ و $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = D$ که D در آن ابعاد فضا-زمان است، به دست می آوریم:

$$R - \frac{D}{2} R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (2.4)$$

با به دست آوردن R و قرار دادن آن در (2.3) و در فضا-زمان 4 بعدی $D=4$ ، معادله میدان تبدیل می شود:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

ناظری که دائما در حال شتاب گرفتن است در فضای ریندلر است، که خود، زیرمجموعه ای از فضای مینکوفسکی است. برای سادگی، ابتدا فیزیک یک مشاهده گر در حال شتاب را در ابعاد 1 + 1 تجزیه و تحلیل میکنیم. ناظر در حال حرکت در جهت x است و دارای شتابی به بزرگی α است. مسیر را می توان در فضا-زمان مینکوفسکی به صورت زیر نوشت: [1]

$$x^\mu(\tau) = (\frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau), \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau)) \quad (2.6)$$

جایی که τ زمان ویژه مشاهده کننده است. در فضا-زمان مینکوفسکی دو-بردار شتاب $a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$ است. با یافتن مولفه های شتاب با استفاده از معادله (2.6) به راحتی می توان فهمید که $\sqrt{a^\mu a_\mu} = \alpha$ ، بنابراین مسیر یک ناظر را توصیف می کند که دارای شتابی به بزرگی α است. با استفاده از $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ ، مشخص است که مسیر ریندلر (شتاب ثابت) تبدیل میشود به:

$$x^2(\tau) = t^2(\tau) + \frac{1}{\alpha^2} \quad (2.7)$$

x مجانب تا $t -$ در بی نهایت پوچ گذشته¹ و مجانب t در بی نهایت پوچ آینده.

¹. null infinity

مجموعه ای جدید از مختصات η و ξ را انتخاب میکنیم

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \\ x &= \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \end{aligned} \quad (۲.۸)$$

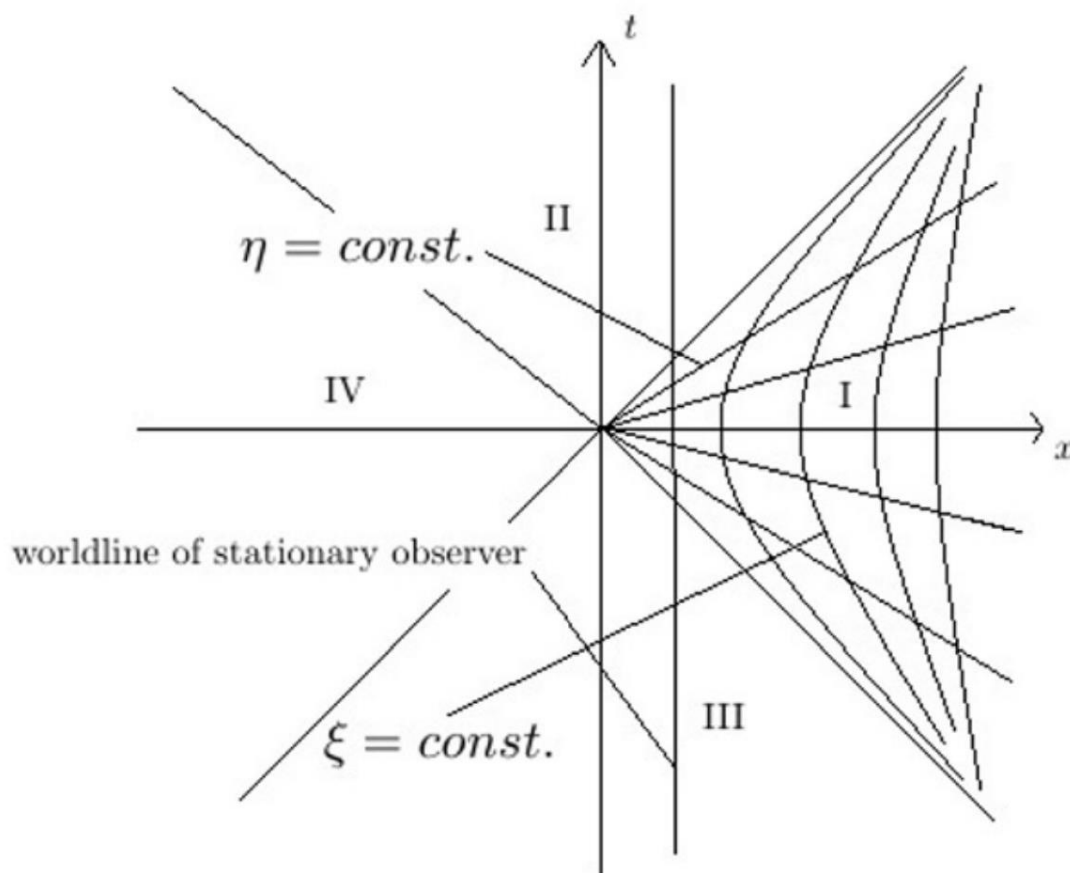
هم ξ و هم η از منفی بی نهایت تا مثبت بینهایت را در برمیگیرند. منطقه ی I در تصویر ۲.۱ قسمت $x > |t|$ را در بر میگیرد.

مسیر ریندلر که قبلاً با معادله (۲.۶) داده شده بود اکنون بر حسب مختصات جدید آورده شده است:

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= \frac{\alpha}{a} \tau \\ \xi(\tau) &= \frac{1}{a} \ln\left(\frac{\alpha}{a}\right) \end{aligned} \quad (۲.۹)$$

تحت مختصات جدید، متریک مینکوفسکی به متریک ریندلر که توسط ناظر دائماً در حال شتاب اندازه گیری میشود:

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) \quad (۲.۱۰)$$



شکل ۲.۱: فضا-زمان ریندلر. منطقه I تنها منطقه ای است که یا ناظر دائما در حال شتاب در آن قرار دارد.

فضا-زمان ریندلر در دل فضای زمان مینکوفسکی تعبیه شده است و منطقه I تنها منطقه ای است که برای یک مشاهده گر با شتاب ثابت در جهت مثبت x قابل دسترسی است [1]. خطوط $x = \pm t$ بصورت مجانبی توسط ناظران ریندلر در بی نهایت صفر گذشته و آینده^۲ نزدیک می شوند و بنابراین این خطوط انواع افق را مشخص می کنند که آن را در بخش ۳.۲ در مورد آن مشاهده می کنیم. به طور دقیق باید گفت این افق ها با افق رویداد سیاهچاله متفاوت هستند از آنجا که افق ریندلر وابسته به حرکت مشاهده کننده است [4]

^۲. past and future null infinity

سیاهچاله شوارتزشیلد، ظاهراً نمایانگر سیاه چاله هایی که در جهان ما وجود دارند نیست. به نظر می رسد که سیاهچاله های واقعی دارای تکانه زاویه ای غیر صفر دارای بار الکتریکی هستند در حالی که تنها خاصیت سوراخ توصیف شده توسط سیستم شوارتزشیلد جرم آن است. معیاری که برای توصیف سیاهچاله باردار استفاده می شود، راه حل ریسنر نوردستورم³ است؛ این روش با تغییر در کنش انیشتین-ماکسول به دست می آید [4]:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x \quad (2.11)$$

برای به دست آوردن معادله ی حرکت

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha}) \quad (2.12)$$

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.13)$$

متریک متقارن کروی برابر است با: [4]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.14)$$

که در آن Q بار سیاهچاله است. این حل یکتای متقارن کروی برای معادلات (2.12) و (2.13) است. [2]

تعریف میکنیم:

$$; r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.15)$$

$$\Delta = Q^2 - 2Mr + r^2 = (r - r_+)(r - r_-) \quad (2.16)$$

متریک زیر را به ما میدهد:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta}{r^2}\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\Delta}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.17)$$

جرم (M) و بار (Q) واحد واحدی دارند [4].

³. Reissner-Nordstrom

چگونه می توان سیاهچاله ای عمومی تر را توصیف کرد؟ برای این منظور ما به راه حل کر-نویمان⁴ نیاز داریم که هم شامل بار و هم حرکت زاویه ای سیاهچاله است. این جواب یک سیاهچاله ی باردار به جرم M را از طریق زاویه قطبی φ با تکانه زاویه ای در واحد جرم می چرخاند [4]

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) dt d\varphi + \Sigma d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.18)$$

که در آن

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.19)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2 \quad (2.20)$$

و مولفه های پتانسل برداری برابر است با

$$A_t = \frac{Qr}{\Sigma}, \quad A_\varphi = -\frac{Qar \sin \theta}{\Sigma}, \quad A_r = A_\theta = 0 \quad (2.21)$$

وقتی بار Q صفر باشد، متریک کر را پیدا می کنیم. متریک کر دارای ویژگی عجیبی است که یک تکینگی به شکل حلقه متمرکز در $r = 0$ را با شعاع محدود توصیف می کند. [4]

⁴. kerr-neumann

۲.۲ ریاضیات مفید برای سیاهچاله ها

در این بخش از راه حل های داده شده در کارول [1] و پواسون [5] استفاده شده است.

یکی از قدرتمندترین تکنیک های مورد استفاده در مطالعه سیاهچاله ها و نسبیت عام هندسه دیفرانسیل است. منیفولد⁵ یک فضای توپولوژیکی است که به صورت محلی⁶ اقلیدسی به نظر می رسد. یک میدان برداری را بر روی منیفولد $v^\mu(x)$ ، با منحنی $x_\mu(t)$ که در آن $v^\mu = dx^\mu/dt$ تعیین میکنیم. حال اگر تانسوری داشته باشیم که در نقطه ی $T(p)$ تعریف شده باشد تغییرات آن را نسبت به منحنی های انتگرال بررسی میکنیم. یک دیفرئومورفیسم⁷ یک منیفولد را به خودش میبرد $\phi: M \rightarrow M$. اگر میدان برداری در M همه جا پیوسته و غیر صفر باشد، مجموعه منحنی های انتگرال آن یک هم نهشتی⁸ را تشکیل می دهد. [1]

$\phi_s(p)$ فاصله نقطه s را از p تعریف می کند. پارامتر s فاصله را در امتداد منحنی انتگرال نشان میدهد (برای هر نقطه از منیفولد یک منحنی انتگرال منحصر به فرد تعریف شده است). مشتق لی⁹ تانسور T در امتداد میدان برداری $v^\mu(x)$ توسط رابطه ی زیر داده میشود:

$$\mathcal{L}_v T = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\phi_t^*[T(\phi_t(p))] - T(p)}{t} \right) \quad (2.22)$$

اگر مشتق لی را بر روی تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ اعمال کنیم [5]

$$(\mathcal{L}_v g)_{\mu\nu} = \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu \quad (2.23)$$

وقتی معادله فوق برابر با صفر باشد، این به عنوان معادله ی کیلینگ¹⁰ شناخته می شود و هر بردار v که در آن صدق کند یک بردار کیلینگ است. بردار کیلینگ جهتی را نشان می دهد که در آن متریک تغییر نکرده است. یک روش آسان برای فهمیدن اینکه آیا یک متریک دارای بردار کیلینگ است وجود دارد: اگر ضرایب متریک مستقل از t باشند، متریک ثابت است، اگر تابعی از زاویه قطبی باشد، متقارن محوری¹¹ است. [2]

⁵. manifold

⁶. locally

⁷. diffeomorphism

⁸. Congruence

⁹. Lie derivative

¹⁰. Killing

¹¹. axisymmetric

بردارهای کیلینگ همچنین اجازه می دهند تا قانون بقا برای ذراتی که بر روی ژئودزیک در فضا-زمان حرکت میکنند، برقرار باشد. برای بردار کیلینگ v^μ ، بقای بار Q با ضرب بردار در تکانه به دست می آید که $\mathcal{L}$ در آن لاگرانژی سیستم است:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (2.24)$$

$$Q = v^\mu p_\mu \quad (2.25)$$

ابرسطح¹² نیز یکی از ابزارهای مورد استفاده در نسبیت عام است که بسته به خصوصیات بردارهای نرمالشان آنها می توانند به صورت زمان گونه،¹³ فضاگونه¹⁴ و یا صفر¹⁵ باشند. اگر یکی از آنها دارای بردار نرمال فضاگونه باشد، ابرسطح آن زمانگونه است و برعکس. ابرسطح صفر دارای بردار نرمال صفر است. [4] یک ویژگی بسیار مهم نسبیت عام که در مطالعه سیاهچاله ها مفید است، افق کیلینگ¹⁶ است. اگر یک میدان برداری کیلینگ χ^μ در امتداد یک ابرسطح Σ صفر (خنثی) باشد، Σ یک افق کیلینگ برای χ است [5]. رابطه ی بین افق کیلینگ و افق رویداد در کارول آورده شده است [1]: "هر افق رویداد Σ در یک فضا-زمان ثابت و تخت، یک افق کیلینگ برای برخی از بردارهای کیلینگ χ^μ است". افق های کیلینگ در تعریف کمیتی را که به نام جاذبه سطح¹⁷ شود، مفید هستند: در امتداد افق کیلینگ، میدان برداری کیلینگ χ^μ در رابطه ی زیر صدق میکند:

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\alpha = -\kappa \chi^\alpha \quad (2.26)$$

جایی که κ نشان دهنده جاذبه ی سطحی است، که معمولاً در افق مقداری ثابت دارد [1]. κ را می توان برابر با یک ثابت دلخواه انتخاب کرد، اما می توانیم آن را با استفاده از شرایط مرزی به تعیین کنیم. به عنوان مثال در یک فضای همواره تخت، بردار کیلینگ $\kappa = \frac{\partial}{\partial t}$ را می توان در بی نهایت بر روی $\kappa_\mu \chi^\mu = -1$ تنظیم کرد که مقدار κ را تعیین می کند.

¹². hypersurface

¹³. timelike

¹⁴. spacelike

¹⁵. null

¹⁶. killing horizon

¹⁷. surface gravity

جاذبه ی سطح در فضا زمان استاتیک و همواره تخت، برابر شتاب یک ناظر ساکن در نزدیکی افق است که توسط یک ناظر ساکن در بی نهایت اندازه گیری می شود.^[1]

ناظر ساکن به گونه ای تعریف می شود که چهار سرعت آن در رابطه ی زیر صدق کند:

$$\kappa^\mu = Vu^\mu \quad (2.27)$$

با ضرب کردن متغیر پاوردای κ^μ در متغیر هم وردای آن κ_μ ، و استفاده از $u^2 = -1$ ، مقداری برای V (که تابعی از فضا-زمان است) $\sqrt{-\kappa_\mu \kappa^\mu}$ میدهد. با توجه به شرایط مرزی، V در Σ صفر است و در بی نهایت به ۱ میل میکند (پس از اینجا $\kappa_\mu \kappa^\mu = -1$) به طور کلی V فاکتور انتقال سرخ¹⁸ نامیده میشود

با دانستن اینکه قوانین بقا با در نظر گرفتن بردار کیلینگ پدیدار می شود، ما متوجه شدیم که یک بردار کیلینگ دارای یک بار است که در امتداد ژئودزیک حفظ می شود. در فضا-زمان شوارتزیلد که متریک آن در رابطه ی ۲.۱ داده شده، بقای بار Q وجود دارد که مربوط به بردار کیلینگ $\kappa = \frac{\partial}{\partial t}$ است ($\kappa^\mu = (1, 0, 0, 0)$)

$$Q = \kappa^\mu p_\mu = \kappa^\mu m g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = m g_{00} \dot{x}^0 = -m \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.28)$$

که در آن m جرم ذره روی ژئودزیک است. برای روشن کردن معنای فیزیکی Q :

$$p_\mu = (-E, p) = m g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.29)$$

بنابراین، انرژی ذره به ازای جرم سکون آن است (همانطور که توسط یک ناظر اینرسی در بی نهایت اندازه گیری می شود) برابر است با:

$$\frac{E}{m} = -g_{00} \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.30)$$

از اینجا به دست می آوریم $Q = -E$

¹⁸. redshift factor

فرکانس فوتون که توسط یک ناظر با چهار-سرعت u^μ برابر $\omega = -p^\mu u_\mu$ اندازه گیری می شود [1] و با توجه به رابطه ی بالا انرژی فوتون را به صورت $E = -p^\mu k_\mu$ داریم. بنابراین کسر E/V مقدار ω را به ما میدهد و به همین دلیل است که V فاکتور انتقال سرخ نامیده می شود. دو ناظر ثابت را در خارج از سیاهچاله شوارتزیلد تصور کنید، مشاهده گر ۱ فوتونی با طول موج λ_1 ساطع می کند که ناظر ۲ اندازه گیری می کند که طول موج آن به $\lambda_2 = \frac{V_2}{V_1} \lambda_1$ انتقال سرخ پیدا کرده است.

چهار شتاب $a^\nu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\nu$ را می توان به صورت $a_\nu = \nabla_\nu \ln V$ بیان کرد

$$a = \frac{1}{V} \sqrt{\nabla_\nu V \nabla^\nu V} \quad (2.31)$$

این مقدار در افق که فاکتور انتقال سرخ آن صفر است، به بی نهایت میل میکند. [1] فضا-زمان شوارتزیلد ثابت و صاف هست پس افق کیلینگ با افق رویداد برابر هستند. بنابراین، می توانیم ببینیم که رفتن به بی نهایت در افق کیلینگ از نظر فیزیکی منطقی است، زیرا برای یک مشاهده گر که درست در بالای افق رویداد معلق است برای ثابت ماندن، باید شتابی فوق العاده زیاد به سمت بیرون داشته باشد و درست بر روی افق، این شتاب بی نهایت خواهد شد. گرانش سطح در افق برابر است با شتاب انتقال سرخ یافته [۳]:

$$\kappa = \nabla a \quad (2.32)$$

اکنون نیز می توانیم ببینیم که بر روی افق رویداد، انتقال سرخ بی نهایت است. حرکت مشاهده کننده ۱ به سمت افق، عامل انتقال قرمز آن V_1 را به صفر می رساند.

حال این مقادیر را در فضا-زمان شوارتزیلد محاسبه کنیم زیرا بعداً هنگام استخراج تبخیر سیاهچاله توسط تابش هاوکنینگ برای ما بسیار مفید خواهد بود. فضای زمان شوارتزیلد دارای بردار کیلینگ $\kappa^\mu = (1,0,0,0)$ و یک چهار سرعت ثابت است که با محاسبه:

$$-1 = u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -(u^0)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (2.33)$$

و با استفاده از $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$ و $\kappa^\mu = V u^\mu$ را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$V = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (2.34)$$

با استفاده از $a_v = \nabla_v \ln V$ به دست می آوریم:

$$a_v = \frac{1}{2} \nabla_v \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \nabla_v r = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \delta_v^r \quad (2.35)$$

که بزرگی آن برابر است با

$$a = \frac{M}{r^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

و بنابراین گرانش سطح برابر است با:

$$\kappa = \frac{1}{4M} \quad (2.37)$$

۲.۳ ترمودینامیک سیاه چاله ها

ارتباط عمیق بین سیاهچاله ها و ترمودینامیک برای اولین بار در اوایل دهه 1970 مطرح شد؛ آنگاه که دانشمندان مشاهده کردند که شباهت قابل توجهی بین قوانین مربوط به رفتار سیاهچاله ها و چهار قانون ترمودینامیکی وجود دارد (جدول 2.1). به عنوان مثال، "قانون دوم" بیان میکند که آنتروپی سیاهچاله مشابه مساحت آن است. بکنشتاین استدلال کرد که سیاهچاله ها باید دارای یک آنتروپی فیزیکی باشند زیرا در غیر این صورت اگر یک جسمی با آنتروپی بالا به داخل سیاهچاله بیافتد باعث میشود که آنتروپی جهان کاهش یابد. بنابراین، او قانون دوم تعمیم یافته ای را مطرح کرد که بیان می کرد مجموع آنتروپی ماده خارج از سیاهچاله ها به علاوه آنتروپی خود سیاهچاله ها هرگز کاهش نمی یابد. در ابتدا باور بر این بود که چون دمای سیاه چاله صفر است سیاه چاله نمیتواند آنتروپی داشته باشد اما پس از بکنشتاین و کشف تابش هاوکینگ، دمای ترمودینامیکی برای سیاه چاله به دست آورده شد. (بخش 3.3)

سیاه چاله	ترمودینامیک کلاسیک	قانون
گرانش سطح κ در افق رویداد یک سیاه چاله ی ساکن، ثابت میماند.	در تعادل ترمودینامیکی، دمای T در تمام سیستم ثابت است.	صفرم
$dM = \frac{1}{8\pi} \kappa dA + \Omega_H dJ$	$dE = TdS + W$	اول
تغییرات مساحت A همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.	تغییرات آنترופی همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.	دوم
$\kappa = 0$ پایین ترین گرانش سطح ممکن است.	$T = 0$ پایین ترین دمای ممکن است.	سوم

جدول 2.1: مقایسه ی بین قوانین ترمودینامیک و سیاه چاله ها

فصل ۳: تابش هاوکینگ

۳.۱ نظریه میدان کوانتومی در فضا-زمان منحنی

نظریه میدان کوانتومی در قرن گذشته به عنوان مبنایی برای موفق ترین نظریه های علمی شناخته شده است زیرا مبنای دو نظریه ی موفق QED ، QCD به عنوان ابزارهایی بسیار قدرتمند برای مطالعه ی طبیعت به وجود آمده اند. اما ترکیب QFT و نسبیت عام بسیار دشوار است گرچه در چارچوب نظریه هایی مانند ابر تقارن و نظریه ریسمان پیشرفتی چشمگیر در این باره حاصل شده است. [6]

ساده ترین میدان برای بررسی، میدان اسکالر حقیقی بزرگ ϕ^{19} است. لاگرانژی برای ϕ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.1)$$

جایی که متریک $g^{\mu\nu}$ در اینجا مینکوفسکی²⁰ است و m جرم میدان [6]. اکنون با استفاده از معادلات اولر-لاگرانژ معادله حرکت را به دست می آوریم:

$$\square \phi = m^2 \phi \quad (3.2)$$

که معروف به معادله کلاین-گوردون، $\square \phi$ نشانگر عملگر دالامبرین²¹ $\partial_\mu \partial^\mu$ است که بر میدان عمل می کند. جواب موج تخت کلاین-گوردون به صورت زیر است:

$$\phi = \phi_0 e^{ip_u x^\mu} \quad (3.3)$$

که در آن $p^\mu = (\omega, k)$ و در رابطه پراکندگی $P^2 + m^2 = 0$ صدق می کند ($\hbar = 1$). می خواهیم با تشکیل یک پایه ی ارتونورمال (= متعامد یکه²²) عمومی ترین راه حل را پیدا کنیم که بتوان جواب های دیگر را

¹⁹. real massive scalar field

²⁰. minkowskian

²¹. d'Alembertian

²². orthonormal

بر مبنای آن نوشت. اُرتونورمال بودن را با تعریف یک ضرب داخلی در فضای کلاین-گوردون می توان نشان داد. ضرب داخلی دو جواب معادله در ثابت $t =$ برابر است با [1]

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^3x \quad (3.4)$$

مجموعه ی پایه های اُرتونورمال، شامل همه حالت‌های موج تخت با فرکانس مثبت و همیوگ آنها است یعنی $\{\psi_p, \psi_p^*\}$

$$\phi = \int d^3p (a_p \psi_p + a_p^\dagger \psi_p^*) \quad (3.5)$$

با در نظر گرفتن ψ_p به عنوان فرکانس مثبت و همیوگ آن فرکانس منفی خواهیم داشت: [1]

$$\partial_t \psi_p = -i\omega \psi_p \quad (3.6)$$

$$\partial_t \psi_p^* = i\omega \psi_p^* \quad (3.7)$$

در هر دو معادله $\omega > 0$ با اینکه (3.6) حالت های فرکانس مثبت را توصیف می کند و (3.7) حالت های فرکانس منفی را توصیف می کند (این به دلیل این است که معادله ی دومی مزدوج مختلط است که در نتیجه ی آن علامت i را در جواب موج تخت تغییر میکند) [1]. ضرایب عملگرهای نابودی²³ و ایجاد²⁴ در روابط زیر صدق میکنند.

$$[a_p, a_{p'}] = 0$$

$$[a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0 \quad (3.8)$$

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = \delta^3(p - p')$$

که در آن خلأ توسط $a_p |0\rangle = 0$ به ازای همه ی p ها تعریف می شود و به ما امکان می دهد حالت‌های کوانتومی دلخواه برای بسیاری از ذرات ایجاد کنیم (پایه ی فُک²⁵ برای فضای هیلبرت). مُد های $\omega > 0$ در یک چارچوب اینرسی را می توان به صورت ترکیب خطی از مُد های $\omega > 0$ در یک چارچوب تبدیل لورنتس تجزیه کرد، این بدان معنی است که همه ناظران اینرسی توافق بر این دارند که آیا ذره را اندازه می گیرند و یا حالت خلأ. اثبات

²³. annihilation

²⁴. creation

²⁵. fock basis

کارول [1]، نشان می دهد که اساس این مسئله در این است که آیا می توانیم یک مُد را فرکانس مثبت یا منفی بنامیم. یک مُد فرکانس مثبت را با سرعت $v = \frac{dx}{dt}$ خیز دهیم، بررسی میکنیم که فرکانس در این چارچوب اینرسی جدید چگونه رفتار می کند [2]

$$t = \gamma(t' + v \cdot x') \quad (3.9)$$

$$x = \gamma(x' + vt')^{26} \quad (3.10)$$

در چارچوب جدید که خیز یافته است، با استفاده از جواب موج تخت ۳.۳ و $\omega' = \gamma(\omega - v \cdot k)$ چنین چیزی را داریم:

$$\partial_{t'} \psi_p = \frac{\partial x^\mu}{\partial t'} \partial_\mu \psi_p = -i\omega' \psi_p \quad (3.11)$$

این نشان می دهد که یک ذره کوانتومی تعریف شده در یک سطح تخت را می توان خیز داد تا یک ذره با مومنتوم خیز یافته شده در چارچوب جدید بدست آید. بنابراین، وجود ذرات یا فقدان آنها (خلاً) مستقل از چارچوب اینرسی در فضا های تخت است. اما این قضیه در مورد نظریه ی میدان در فضا های خمیده، که مفهوم "ذره" و "خلا" وابسته به ناظر باشند، وجود ندارد.

هنگامی که به نظریه های میدان در سطح خمیده نگاه می کنیم، باید فضا-زمان در ابرطرفه جهانی²⁷ صدق کند. [7] این امر مستلزم این است که فضا-زمان دارای یک سطح کوشی²⁸ Σ باشد؛ یعنی یک ابر سطح²⁹ سه بعدی که تمام منحنی های گذشته و آینده یک بار از آن عبور می کنند و هر منحنی دارای بُردار مماسی است که در هیچ نقطه ای فضا-مانند نیست.

قضایای ۴.۱.۱ و ۴.۱.۲ در والد [7] بیان می کند که یک فضای هذلولی می تواند توسط سطوح کوشی پوشیده شود که در آن هر ابرسطح که در آن ثابت t یک سطح کوشی است. با تعریف یک میدان اسکالر حقیقی در فضای Σ ، که در معادله کلاین-گوردون (۳.۲) صدق می کند و نیز با تعمیم ضرب داخلی از (۳.۴) خواهیم داشت: [۱]

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int (\phi_1 \nabla_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \nabla_\mu \phi_1) dS^\mu \quad (3.12)$$

²⁶. boost

²⁷. global hyperbolicity

²⁸. cauchy surface

²⁹. hypersurface

که در آن: انتگرال روی سطح کوشی Σ است، dS المان سطح با بردار نرمال n^μ و $dS^\mu = dS n^\mu$ [1].

همانند مراحل که برای فضا-زمان مسطح دنبال کردیم، اکنون جواب های معادله کلاین-گوردون را در یک سطح خمیده پیدا می کنیم و آنها را با ضرایب ایجاد و نابودی در مد های فرکانس مثبت و منفی تجزیه می کنیم. اگر یک سطح کوشی در فضا-زمان وجود داشته باشد، ما همیشه می توانیم جواب های خودمان را در پایه های ارتونورمال تجزیه کنیم $\{f_i, f_i^*\}$ که در رابطه زیر صدق می کند: [4]

$$\begin{aligned}(f_i, f_j) &= \delta_{ij} \\ (f_i^*, f_j^*) &= -\delta_{ij} \\ (f_i, f_j^*) &= 0\end{aligned}\tag{۳.۱۳}$$

با انتخاب $\{f_i, f_i^*\}$ به عنوان یک مجموعه کامل باشد، می توانیم آن را بسط دهیم

$$\phi = \sum_i (a_i f_i + a_i^\dagger f_i^*)\tag{۳.۱۴}$$

که ضرایب در روابط زیر صدق میکنند:

$$\begin{aligned}[a_i, a_j] &= 0 \\ [a_i^\dagger, a_j^\dagger] &= 0 \\ [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij}\end{aligned}\tag{۳.۱۵}$$

همانطور که پیش از این a_i را به عنوان عملگر نابودی و $a_i^\dagger$ را نیز به عنوان عملگر ایجاد تعریف کردیم و، بنابراین، خلا f به صورت زیر تعریف میشود:

$$a_i |0_f\rangle = 0 \quad \forall i\tag{۳.۱۶}$$

ما می توانیم تعدادی حالت برانگیخته شده در حالت $|0_f\rangle$ ایجاد کنیم:

$$|n_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (a_i^\dagger)^{n_i} |0_f\rangle\tag{۳.۱۷}$$

عملگر تعداد³⁰ برای حالت f همانطور که انتظار می رود برابر است با:

$$n_{fi} = a_i^\dagger a_i \quad (3.18)$$

بر خلاف حالت تخت، پایه ی $\{f_i, f_i^*\}$ یکتا نیست و، بنابراین، عملگر خلأ و شمارش تابعی از پایه خواهد بود. بیایید پایه دیگری را بررسی کنیم ($\{g_i, g_i^*\}$) و آن را بسط دهیم:

$$\phi = \sum_i (b_i g_i + b_i^\dagger g_i^*) \quad (3.19)$$

عملگرهای جدید نابودی b_i و ایجاد $b_i^\dagger$ در همان روابط قبلی صدق می کنند:

$$\begin{aligned} [b_i, b_j] &= 0 \\ [b_i^\dagger, b_j^\dagger] &= 0 \\ [b_i, b_j^\dagger] &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.20)$$

با حالت خلأ تعریف شده توسط

$$b_i |0_g\rangle = 0 \quad \forall i \quad (3.21)$$

و عملگر شمارش $n_{gi} = b_i^\dagger b_i$

برای دیدن اینکه چگونه ناظران مختلف پدیده های فیزیکی یکسان را در فضا-زمان های منحنی اندازه گیری می کنند هر مُد را بر مبنای دیگری بسط می دهیم [1]

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*) \quad (3.22)$$

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* g_j - \beta_{ij} g_j^*) \quad (3.23)$$

این روابط بین پایه های مختلف نمونه هایی از چیزی است که به آن تبدیلات بوگولوبوف³¹ و α_{ij} و β_{ij} که آنها را ضرایب بوگولوبوف می نامند، که در روابط $\alpha_{ij} = (g_i, f_j)$ و $\beta_{ij} = -(g_i, f_j^*)$ و دو رابطه ی زیر صدق میکند:

³⁰. number

³¹. bogolubov

$$\begin{aligned}\sum_j (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) &= \delta_{ij} \\ \sum_j (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) &= 0\end{aligned}\quad (3.24)$$

تبدیلات بوگولوبوف همچنین به ما امکان می دهد عملگرهای یک مُد را بر مبنای عملگرهای مُد دیگر بیان کنیم [1]

$$\begin{aligned}a_i &= \sum_j (\alpha_{ij} b_j + \beta_{jk}^* b_j^\dagger) \\ b_i &= \sum_j (\alpha_{ij}^* a_j - \beta_{ij}^* a_j^\dagger)\end{aligned}\quad (3.25)$$

حال می خواهیم ببینیم که یک ناظر با استفاده از مجموعه ای از مُد ها در خلأ f که بر حسب مجموعه ای دیگر تعریف شده اند، چه چیزی را می بیند. با تنظیم حالت کوانتومی در خلأ، مقدار انتظار³² عملگر تعداد g را با استفاده از معادلات (3.15) و (3.25). به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\langle 0_f | n_{gi} | 0_f \rangle &= \langle 0_f | b_i^\dagger b_i | 0_f \rangle = a_j^\dagger \left\langle 0_f \left| \sum_{jk} (\alpha_{ij} a_j^\dagger - \beta_{ij} a_j) (\alpha_{ik}^* a_k - \beta_{ik}^* a_k^\dagger) \right| 0_f \right\rangle \\ &= (-\beta_{ij})(-\beta_{ik}^*) \langle 0_f | a_j a_k^\dagger | 0_f \rangle = \beta_{ij} \beta_{ik}^* \delta_{jk} \langle 0_f | 0_f \rangle = \sum_j \beta_{ij} \beta_{ij}^*\end{aligned}\quad (3.26)$$

به طور کلی این مقدار غیر صفر خواهد بود و بنابراین مسأله وجود ذرات یا وجود خلأ در نهایت به ناظر بستگی دارد. در نظریه میدان کوانتومی، این میدان ها هستند که ابزار اساسی فیزیکی هستند؛ تصویر ذرات احتمالی است و به وضوح تعریف نشده است [1]

تصویری بسیار ساده اما مفید از چگونگی ایجاد ذرات در اثر تغییر انحنای فضا-زمان، ناشی از مشاهده عملکرد موج به تغییر ناگهانی پتانسیل است. نظریه میدان کوانتومی حکم می کند که هر حالت از یک میدان به عنوان یک نوسانگر هارمونیک عمل میکند. برای مثال این مُد دارای فرکانس ω_1 است، اما به محض تغییر فضا-زمانی که در آن ساکن شده است، فرکانس مُد می تواند تغییر کند و مقدار دیگری ω_2 بدست آورد. با استفاده از قضیه آدیاباتیک مکانیک کوانتوم می دانیم که تغییر پتانسیل به آهستگی نسبت به فرکانس های ω_1 و ω_2 ، مُد را به گونه ای سازگار می کند که در طول تغییر پتانسیل، به عنوان حالت خلأ باقی بماند. اگر در عوض پتانسیل به طور ناگهانی

³². expectation value

تغییر کند، تابع موج زمان کافی برای تغییر مناسب را نداشته است و بنابراین از حالت خلأ به حالت برانگیخته تبدیل می شود. [6]

خلا ω_1 را می توان بر حسب حالت های برانگیخته ω_2 بسط داد:

$$|0\rangle_{\omega_1} = C|0\rangle_{\omega_2} + C_1|1\rangle_{\omega_2} + C_2|2\rangle_{\omega_2} + \dots \quad (3.27)$$

اما تابع موج متقارن است و ما می توانیم شماره های فرد را در بسطمان حذف کنیم.

$$|0\rangle_{\omega_1} = C|0\rangle_{\omega_2} + C_2|2\rangle_{\omega_2} + \dots \quad (3.28)$$

بنابراین یک تغییر به اندازه کافی سریع در انحنای فضا-زمان باعث ایجاد جفت برانگیخته شده می شود.

۳.۲ اثر اونراه

در این بخش با توجه به نمایش قبلی فضا-زمان ریندلر، نتیجه خواهیم گرفت که یک ناظر در حال شتاب در خلا مینکوفسکی، تابش حرارتی، معروف به اثر اونراه را تشخیص می دهد و سپس نشان داده خواهد شد که این پدیده حاکی از اثر هاوکینگ است که به موجب آن یک سیاهچاله تابش حرارتی را منتشر میکند که منبع پارادوکس اطلاعات است. در شکل ۲.۱ دیدیم که فضا-زمان مینکوفسکی توسط مختصات ریندلر به چهار منطقه تقسیم می شود. یک شباهت قوی بین ناظر ریندلر در منطقه I و ناظر ایستا در بخش $r > GM$ فضا-زمان شوارتزشیلد وجود دارد. متریک ریندلر به شکل زیر وجود دارد:

$$ds^2 = e^{2a\xi}(-d\eta^2 + d\xi^2) \quad (3.29)$$

هیچ یک از ضرایب متریک تابعی از η نیستند و بنابراین، یک بردار کیلینگ وجود دارد که تحت مختصات مینکوفسکی با استفاده از معادله ۲.۸ عبارت است از:

$$\partial_\eta = \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} = a(x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}) \quad (3.30)$$

این میدان کیلینگ برای خیز لورنتس³³ در مناطق I و IV شکل ۲.۱ در جهت مثبت X است [1] ∂_η یک بردار کیلینگ زمانگونه است در حالی که در مناطق II و III فضاگونه است. بنابراین خطوط $x = \pm t$ هر دو افق

³³. Lorentz boost

کیلینگ هستند مختصات ریندلر در منطقه IV که در آن $x < |t|$ است را می توان به صورت زیر تعریف کرد: [1]

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \\ t &= -\frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \end{aligned} \quad (3.31)$$

همانند بخش گذشته، برای تعریف حالت‌های فرکانس مثبت و منفی نیاز به بردار کیلینگ زمانگونه داریم، بنابراین در اینجا می توانیم از ∂_η استفاده کنیم. اگر یک میدان اسکالر $1+1$ بعدی و بدون جرم را در نظر بگیریم که مطابق با معادله کلاین-گوردون در مختصات ریندلر بیان شده است:

$$\square \phi = e^{-2a\xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \phi = 0 \quad (3.32)$$

با حالت موج تخت حل می شود که در آن $\omega = |k|$ [1]

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega\eta + ik\xi} \quad (3.33)$$

از معادلات ۲.۱۰ میدانیم که η متناسب با زمان ویژه ناظر ریندلر است و بنابراین تعریف ما از حالت فرکانس مثبت باید چنین باشد: (با استفاده از معادله ی ۳.۶)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} g_k = -i\omega g_k \quad (3.34)$$

یک نکته مهم این است که بردار کیلینگ مرتبط که حالت های فرکانس مثبت g_k را تعریف می کند باید به سمت زمان آینده باشد. $\frac{\partial}{\partial \eta}$ در مناطق I و IV، در جهت مخالف قرار دارد، بنابراین بردار کیلینگ مورد نیاز برای تعریف حالت های فرکانس مثبت در منطقه IV باید $-\frac{\partial}{\partial \eta}$ باشد. $\frac{\partial}{\partial \eta}$ در ناحیه ی I به سمت آینده و $-\frac{\partial}{\partial \eta}$ در ناحیه ی IV به سمت زمان آینده است.) برای برطرف کردن این وضعیت، دو مجموعه مُد تعریف می کنیم، هر یک در یک منطقه خاص غیر صفر است: [1]

$$g_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta + ik\xi} \quad (3.35)$$

معادله (3.35) در منطقه I صدق میکند و در منطقه IV، $g_k^{(1)} = 0$ همچنین :

$$g_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega\eta + ik\xi} \quad (3.36)$$

که در آن (3.36) فقط در منطقه IV صدق میکند و در منطقه I $g_k^{(2)} = 0$ با استفاده از این دو حالت، می بینیم که هر دو منطقه I و IV تحت پوشش قرار گرفته اند. متریک ریندلر در کل این دو منطقه معتبر است [1] و [4]. اکنون هر دو مُد در حال حاضر نسبت به بردار کیلینگ به سمت آینده، فرکانس مثبت دارند ($\omega > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} g_k^{(1)} &= -i\omega g_k^{(1)} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} g_k^{(2)} &= -i\omega g_k^{(2)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

با مقایسه نسبت به معادلات (3.6)، (3.7) میتوان دید که هر دو عبارت موجود در (3.37) با حالت های فرکانس مثبت مطابقت دارند.

این مُد ها و مزدوج مختلط آنها مجموعه کاملی را در فضا-زمان مورد بررسی قرار می دهند. با بسط یک میدان اسکالر در این مُد ها [1]

$$\Phi = \int dk (b_k^{(1)} g_k^{(1)} + b_k^{(1)\dagger} g_k^{(1)*} + b_k^{(2)} g_k^{(2)} + b_k^{(2)\dagger} g_k^{(2)*}) \quad (3.38)$$

ضرایب مُد ها، عملگرهای نابودی و ایجاد و خود مُد ها هر کدام در ضرب داخلی صدق می کنند.

$$\begin{aligned} (g_{k_1}^{(1)}, g_{k_2}^{(1)}) &= \delta(k_1 - k_2) & (g_{k_1}^{(1)*}, g_{k_2}^{(1)*}) &= -\delta(k_1 - k_2) \\ (g_{k_1}^{(2)}, g_{k_2}^{(2)}) &= \delta(k_1 - k_2) & (g_{k_1}^{(2)*}, g_{k_2}^{(2)*}) &= -\delta(k_1 - k_2) \\ (g_{k_1}^{(1)}, g_{k_2}^{(2)}) &= 0 & (g_{k_1}^{(1)*}, g_{k_2}^{(2)*}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

با مقایسه ی بسط میدان در مُد های مینکوفسکی (3.5) با بسط جدید در مد ریندلر (3.38) میتوان دید که خلا ها با هم منطبق نیستند. به عنوان مثال خلا مشاهده شده توسط ناظری در فضا-زمان مینکوفسکی $a_k|0_M\rangle = 0$ توسط ناظر ریندلر به صورت $b_k^{(1)}|0_R\rangle = b_k^{(2)}|0_R\rangle = 0$ توصیف می شود که پر از ذره است و ناظر مینکوفسکی اساساً خلا را مشاهده نمیکند. این در نتیجه فقدان مُد مینکوفسکی با فرکانس کاملاً مثبت است که بتواند حالت

ریندلر را با آن بسط داد. به عنوان مثال عملگر نابودی که خلا ریندلر را تعریف می کند فقط می تواند به ترکیبی از عملگرهای نابودی و ایجاد مینکوفسکی تجزیه شود [1].

حال بیایید خصوصیات ذراتی را بررسی کنیم که یک ناظر ریندلر هنگامی که این ذرات در خلا مینکوفسکی شتاب میگیرند مشاهده می کند. به جای یافتن مقدار انتظار³⁴ خلا مینکوفسکی از عملگر تعداد ریندلر با استفاده از ضرایب بوگولوبوف همانطور که در بخش ۳.۱ وجود دارد، ما از راه کوتاه تر بر اساس پیوسته و تحلیلی بودن مُد های ریندلر در کل فضا-زمان استفاده خواهیم کرد و متعاقباً این نتیجه را با توجه به مُد های ریندلر و با محدودیت بیشتر فقط در مناطق I و IV به دست خواهیم آورد.

با استفاده از تعاریف مختصاتی که در (۲.۸) و (۳.۳۱) آورده شده می یابیم

$$e^{-a(\eta-\xi)} = \begin{cases} a(-t+x) & I \\ a(t-x) & IV \end{cases} \quad (3.40)$$

$$e^{a(\eta-\xi)} = \begin{cases} a(t+x) & I \\ a(-t-x) & IV \end{cases} \quad (3.41)$$

با استفاده از معادله ی مُد $g_k^{(1)}$ در ۳.۳۵ ما بدست می آوریم:

$$\sqrt{4\pi\omega}g_k^{(1)} = e^{-i\omega\eta+ik\xi} = e^{-i\omega(\eta-\xi)} = a\frac{i\omega}{a}(-t+x)\frac{i\omega}{a} \quad (3.42)$$

که در آن ما از $\omega = k$ که استفاده کرده ایم زیرا در موج تخت برای g_k در معادله ی (۳.۳۳) داریم، $\omega = |k|$ و در اینجا $k > 0$ همانطور که در بالا بیان کردیم، روش ما در اینجا ادامه دادن مُد های ریندلر به کل فضا-زمان و سپس بیان آنها بر اساس مُدهای اصلی ریندلر در مناطق I و IV است. اما عبارتی که به دست آورده ایم شامل $g_k^{(1)}$ است که در منطقه IV برابر صفر است، بنابراین باید حالت های دیگر $g_k^{(2)}$ را نیز در نظر بگیریم تا بتوانیم هر دو منطقه را پوشش دهیم. با تکرار روش بالا به دست می آوریم:

$$\sqrt{4\pi\omega}g_k^{(2)*} = e^{i\omega\eta+ik\xi} = e^{i\omega(\eta+\xi)} = a\frac{-i\omega}{a}(-t-x)\frac{-i\omega}{a} \quad (3.43)$$

³⁴. expectation value

ما می خواهیم که سمت راست (۳.۴۲) و (۳.۴۳) با هم مطابقت داشته باشند بنابراین، با استفاده از $e^{-i\pi} = -1$ ،
(۳.۴۳) را به صورت زیر مینویسیم:

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi\omega}g_{-k}^{(2)*} &= e^{i\omega\eta+ik\xi} = e^{i\omega(\eta-\xi)} = a^{\frac{i\omega}{a}}(t-x)^{\frac{i\omega}{a}} \\ &= a^{\frac{i\omega}{a}}[e^{-i\pi}(-t+x)]^{\frac{i\omega}{a}} = a^{\frac{i\omega}{a}}e^{\frac{\pi\omega}{a}}(-t+x)^{\frac{i\omega}{a}}\end{aligned}\quad (3.44)$$

اکنون می توانیم ترکیبی از حالت ها را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\sqrt{4\pi\omega}\left(g_k^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}g_{-k}^{(2)*}\right) = a^{\frac{i\omega}{a}}(-t+x)^{\frac{i\omega}{a}}\quad (3.45)$$

حالت داده شده در بالا مناطق I و IV را همانطور که می خواستیم در بر می گیرد اما (۳.۴۵) نرمال نیست. فرض کنید عبارت نرمال $g_k^{(1)}$ و $g_k^{(2)}$ داده شده است توسط:

$$\begin{aligned}h_k^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}(e^{\frac{\pi\omega}{2a}}g_k^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}g_{-k}^{(2)\dagger}) \\ h_k^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}(e^{\frac{\pi\omega}{2a}}g_k^{(2)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}g_{-k}^{(1)\dagger})\end{aligned}\quad (3.46)$$

که نرمال بودن آن را میتوان توسط $(h_k^{(1)}, h_k^{(2)}) = \delta(k_1 - k_2)$ چک کرد. با بسط یک میدان اسکالر بر حسب مد های نرمالیزه شده خواهیم داشت:

$$\phi = \int dk \left(c_k^{(1)} h_k^{(1)} + c_k^{(1)\dagger} h_k^{(1)*} + c_k^{(2)} h_k^{(2)} + c_k^{(2)\dagger} h_k^{(2)*} \right) \quad (3.47)$$

در مقایسه با بحث قبلی ای که ما درباره تبدیلات بوگولوبوف در معادلات 3.22 و 3.23 و 3.25 داشتیم میتوانیم عملگر ریندلر b_k را بر حسب عملگرهای c_k بنویسیم.

$$\begin{aligned} b_k^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2a}} c_k^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} c_{-k}^{(2)\dagger}) \\ b_k^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2a}} c_k^{(2)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} c_{-k}^{(1)\dagger}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

یک مشاهده گر در حال شتاب ریندلر در منطقه I یک عملگر شماره $n_R^{(1)}(k) = b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)}$ تشکیل می دهد که اکنون می توانیم آن را با توجه به عملگرهای c_k بیان کنیم. مد های فرکانس مثبت h_k را می توان به حالت های فرکانس مثبت مینکوفسکی تجزیه کرد [4] و بنابراین حالت خلا آنها مشخص می شود. این به ما اجازه می دهد تا سرانجام مقدار انتظار را برای منطقه I برای ناظر ریندلر در خلا مینکوفسکی بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \langle 0_M | n_R^{(1)}(k) | 0_M \rangle &= \langle 0_M | b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)} | 0_M \rangle = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \langle 0_M | e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} c_{-k}^{(2)} c_{-k}^{(2)\dagger} | 0_M \rangle \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \delta(0) = \frac{1}{e^{-\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \delta(0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

مقدار انتظار (3.49) یک توزیع پلانکی در دما است

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad (3.50)$$

که در آن $\hbar = c = 1$ مقدار شتاب است. بنابراین یک ناظر در حال شتاب، از طریق خلا مینکوفسکی یک حمام حرارتی از ذرات را مشاهده میکند.

۳.۳ تبخیر سیاهچاله

هسته اصلی پارادوکس اطلاعات در تابش هاوکینگ نهفته است. اگر سیاهچاله ها رفتاری کلاسیک داشته باشند و مکانیسم تبخیر وجود نداشته باشد، اطلاعاتی که در سیاه چاله قرار می‌گیرند کاملاً دور از دسترس خواهد بود، اما لزوماً از بین نمی روند. اما مکانیک کوانتوم بیان میکند که سیاه چاله ها در نهایت، در زمانی که از سن جهان بیشتر است، از بین می‌روند و تابش حرارتی را از خود به جا می‌گذارند و به ظاهر اطلاعاتی را که درون آنها می افتد از بین می‌برند.

یک تصویر ابتدایی از تابش هاوکینگ شامل یک جفت فوتون است که به دلیل نوسان در نزدیکی افق رویداد یک سیاهچاله در خلا به وجود می آیند، یکی از آنها دارای انرژی E است، اگر این فرآیند به دور از هرگونه سیاهچاله اتفاق بیفتد، فوتون ها در زمانی از مرتبه $\frac{\hbar}{E}$ نابود می شوند. اما اگر ایجاد جفت نزدیک به افق اتفاق بیفتد، فوتون انرژی $-E$ ممکن است در سیاهچاله سقوط کند، در حالی که فوتون دیگر می تواند تا بی نهایت حرکت کند تا جایی که یک ناظر آن را به عنوان تابش هاوکینگ مشاهده کند [۱۰].

بیایید فرض کنیم دو ناظر ایستا در خارج از سیاهچاله در فضای زمان شوارتزشیلد وجود دارد: یکی در r_1 و دیگری در r_2 که ما آن را تا بینهایت می‌بریم. مقیاس شتاب $\frac{1}{2M}$ برابر معکوس شعاع شوارتزیلد است [۱۵]. برای یک ناظر ساکن درست بیرون از افق رویداد در r_1 ، شتاب آن نسبت به $\frac{1}{2M}$ بسیار زیاد است

$$a_1 \gg \frac{1}{2M} \quad (۳.۵۱)$$

که میتوان از آن نتیجه گرفت $2M \gg \frac{1}{a_1}$ در نتیجه می بینیم که ناظر در r_1 یک فضا-زمان تقریباً مسطح را تجربه می کند. از اصل هم ارزی می دانیم ناظری که به درون سیاه چاله و افق رویداد سقوط می کند چیز عجیبی را تجربه نمی کند و تقریباً خلا مینکوفسکی دارد. یک ناظر که آزاد سقوط می کند خلا را می بیند اما یک ناظر ساکن در r_1 با شتاب a_1 به سمت خارج است (تا در همان فاصله شعاعی بماند) و بنابراین تابش اونراه را طبق معادله ی (۳.۵۰) در دمای $\frac{a_1}{2\pi}$ اندازه گیری می کند.

ناظر دیگر در r_2 که فرض می کنیم بی نهایت دور است، لزوماً در منطقه تخت فضا-زمان نیست و تابش اونراه که توسط ناظر در r_1 مشاهده می شود، در بی نهایت به او می رسد اما انتقال سرخ خواهد یافت که مقدار آن توسط فاکتور انتقال سرخ V تعیین می شود.

مقدار انتقال سرخ توسط فاکتور انتقال سرخ V که قبلاً در بخش ۲.۲ معرفی شد، تعیین می شود:

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2} T_1 \quad ; \quad V = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (3.52)$$

در اینجا V و T به عوامل انتقال سرخ و دمای تابش حرارتی که توسط r_1 و r_2 مشاهده می شوند اشاره دارد. ما می دانیم که $T_1 = \frac{a_1}{2\pi}$ و در بی نهایت عامل انتقال سرخ به یک میل می کند ، بنابراین دمای تابش تجربه شده توسط ناظر دوردست - با استفاده از (۲.۳۲) و نزدیک کردن ناظر r_1 به بی نهایت نزدیک به افق باشد که در آن $\kappa = Va$ است:

$$T_1 = \frac{\kappa}{2\pi}$$

این دمای تابش هاوکینگ است که از سیاهچاله ساطع می شود.

فصل ۴ ساختار اطلاعات

۴.۱ اطلاعات چیست؟

وقتی کلمه "اطلاعات" را برای اولین بار در یک زمینه علمی می شنویم، ممکن است معنای دقیق آن برای ما گیج کننده باشد و این بدان دلیل است که اساساً کمی کردن مفاهیم کاملاً ذهنی دشوار است. برای درک مفهوم «اطلاعات» باید در ابتدا نحوه ارتباط آن را با آنتروپی مطالعه کنیم. آنتروپی یکی از اساسی ترین و مهمترین مفاهیم فیزیک در ترمودینامیک، نظریه ی اطلاعات، نظریه کوانتوم و نیز پایه ای برای نمودار زمان است. آنتروپی اندازه گیری اختلال ذاتی یک سیستم است که اولین بار به عنوان کمیت ترمودینامیکی مربوط به انرژی و دما کشف یا ابداع شد. پس از توسعه مکانیک آماری، ایده آنتروپی از دیگر حوزه ها جدا شد و گسترشی نسبی یافت و فیزیکدانان به آن بیشتر همچون شکل داخلی سیستم و احتمالات نگرستند. [8] بر بنیاد قانون دوم ترمودینامیک آنتروپی جهان هرگز نمی تواند کاهش یابد. اکنون می خواهیم ببینیم ارتباط آنتروپی با اطلاعات چگونه است؟

آنتروپی یک سیستم ترمودینامیکی عبارت است از:

$$-k_B \sum p_i \ln p_i \quad (4.1)$$

که جمع بر روی تمام میکرواستیت های³⁵ ممکن مربوط به یک ماکرواستیت³⁶ معین از سیستم باشد. در هر میکرواستیت احتمال وقوع p_i وجود دارد. اگر فرض کنیم که هر میکرواستیت دارای احتمال برابر $p_i = \frac{1}{N}$ باشد که در آن N تعداد میکرواستیت مربوط به یک ماکرواستیت معین است، معادله معروف ناشی از بولتزمن را به دست می آوریم:

$$S = k_B \ln N \quad (4.2)$$

در تعادل ترمودینامیکی در گروه میکرو کانونیکال³⁷ معتبر است. مفهوم اطلاعات که توسط هارتلی و شانون فرمول بندی شده است، تعمیم این مفهوم آنتروپی است. رالف هارتلی³⁸ (۱۸۸۸-۱۹۷۰)، کلود شانون³⁹ (۱۹۱۶-۲۰۰۱) و دیگران نظریه مدرن اطلاعات را در ابتدا به عنوان راهی برای تسریع، فشرده سازی و پردازش سیگنال های مورد

³⁵. microstates

³⁶. macrostate

³⁷. micro-canonical

³⁸. Ralph Hartley

³⁹. Claude Shannon

استفاده در ارتباطات ابداع کردند. از آن زمان این تئوری برای تلفیق نظریه کوانتوم تعمیم یافت و در توسعه محاسبات کوانتومی و مطالعه درهم تنیدگی، مفهومی اساسی تلقی شد. [9]

رالف هارتلی اولین کسی بود که اطلاعات موجود در یک منبع پیام (مجموعه پیام ها)⁴⁰ را در سال ۱۹۲۸ کمی کرد. [8] او این کار را با استفاده از دو پارامتر انجام داد: یکی، تعداد کاراکترهای پیام n و دیگری، تعداد نمادهایی که احتمال یکسان دارند و هر شخص ممکن است از آن استفاده کند. به عنوان مثال، برای رشته بیت 1011001110، $n = 10$ و $s = 2$. هارتلی مفهوم اطلاعات منبع پیام را با استفاده از مفروضات زیر توسعه داد: اطلاعات باید هم تابعی از S و n باشد، و هم متناسب با طول پیام n ، و همچنین بصورت یکنواخت با تعداد پیامهای هم احتمال یعنی S^n افزایش یابد. نمایش اطلاعات با نماد H و با استفاده از مفروضات قبلی چنین است:

$$H = nf(s) = g(s^n) \quad (4.3)$$

که از آن میتوان نتیجه گرفت:

$$f(s) = c \ln s \quad (4.4)$$

که در آن c یک ثابت مثبت است. (با دقت بیشتر H نشان دهنده اطلاعات از دست رفته است، یا نشان دهنده اطلاعات از دست رفته مورد نیاز برای انتخاب پیام از منبع پیام). با جاگذاری (4.4) در معادله (4.3) به راحتی می توان دریافت که: $H = c \ln s^n$ و بنابراین، می توان دید که تعداد پیام های S^n در منبع پیام با تعداد میکرواستیت N سیستم ترمودینامیکی در معادله (4.2) مشابه است و $\frac{S}{k_B} = \ln N$ اطلاعات گمشده ای است برای تعیین میکرواستیت مربوط به یک ماکرواستیت. کلود شانون مفهوم هارتلی را از اطلاعات تعمیم داد تا شامل پیامهایی باشد که از کاراکترهایی تشکیل شده اند که احتمال وقوع آنها نابرابر است. این یک فرم برای اطلاعات شانون است: [10]

$$H = -c \sum_{i=1}^s p_i \ln p_i \quad (4.5)$$

که مشابه معادله (4.1) است.

به نظر می رسد همه اینها نشان می دهد که اطلاعات از دست رفته یا پنهان به نوعی معادل آنتروپی است. مثلاً یک جعبه گاز داغ مهر و موم شده با توجه به مقادیر ماکرواستاتیک ترمودینامیکی آن می تواند در میکرواستیت

⁴⁰. message source

های مختلفی باشد. این بدان معنی است که ما در مورد ساختار داخلی سیستم اطلاعات کمی داریم و بنابراین آنتروپی آن بزرگ است. از طرف دیگر، اگر ما در حال مطالعه یک کریستال کاملاً مرتب در دمای صفر مطلق، از ساختار داخلی آن آگاهی کامل خواهیم داشت و بنابراین آنتروپی صفر خواهد بود و هیچ اطلاعات پنهانی وجود نخواهد داشت. [11]

در دهه ۱۹۳۰ جان فون نویمان مکانیک کوانتومی را دوباره فورمول بندی کرد با جایگزینی ایده تابع موج (تعریف حالت سیستم کوانتومی) توسط ابزاری به نام ماتریس چگالی، و توصیف یک گروه آماری از حالات مختلف کوانتومی. این مسئله باعث شد که هم مکانیک آماری کلاسیک باشد و هم گسترش بیابد تا به نظریه کوانتوم تبدیل گردد. از ماتریس چگالی برای توصیف سیستم های کوانتومی عمومی استفاده می شود که یا حالت های خالص هستند یا حالت های مختلط. اگر ما اطلاعاتی کامل از یک حالت کوانتومی داشته باشیم، خواهیم دانست که احتمال وجود آن در آن حالت یک است، اما در واقعیت معمولاً اطلاعات ناکافی از حالت (های) کوانتومی نداریم و یا مجموعه ترکیبی از حالات مختلف است. [12]

یک ماتریس چگالی ρ به صورت زیر تعریف میشود:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (4.6)$$

به ما می گوید که آیا حالات خالص هستند یا میکس. برای یک حالت میکس، تابع موج ψ_i با احتمال p_i رخ میدهد و مقدار قابل انتظار⁴¹ مشاهده توسط اپراتور O توصیف میشود که عبارت است از:

$$\langle o \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | O | \psi_i \rangle \quad (4.7)$$

با گسترش دادن حالت ها بر پایه α_i

$$|\psi_i\rangle = |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j | \psi_i \rangle \quad (4.8)$$

$$\langle \psi_i | = \langle \psi_i | \alpha_k \rangle \langle \alpha_k | \quad (4.9)$$

⁴¹. expectation value

و جایگزینی بسط ها در معادله (۴.۷) چنین معادلاتی به دست می آید:

$$\langle O \rangle = \sum_{j,k} \left(\sum_i p_i \langle \alpha_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \alpha_k \rangle \right) \langle \alpha_k | O | \alpha_k \rangle \quad (4.10)$$

$$= \sum_{j,k} \langle \alpha_j | \rho | \alpha_k \rangle \langle \alpha_k | O | \alpha_j \rangle \quad (4.11)$$

$$= \text{tr}(\rho O) \quad (4.12)$$

ماتریس های چگالی دارای خصوصیات زیر هستند: تریس (رد) آنها همیشه برابر با یک است (زیرا مجموع احتمالات برابر یک است). این ماتریس ها هرمیتی هستند و مقادیر ویژه آنها برابر همواره بزرگتر و یا مساوی صفر است. وقتی ρ قطری می شود، مقادیر ویژه ρ_i احتمال وجود سیستم کوانتومی را در حالت i نشان می دهند. همانطور که در بالا ذکر شد، اگر یک سیستم در حالت خالص⁴² باشد، دانشی کامل از آن داریم. بنابراین، ماتریس چگالی یک ویژه مقدار غیر صفر خواهد داشت (به دلیل ویژگی تریس باید برابر با یک باشد) زیرا احتمال وجود داشتن آن در این حالت ویژه برابر یک است. اگر ماتریس چگالی بیش از یک ویژه مقدار غیر صفر داشته باشد، حالت میکس⁴³ می شود.

آنتروپی فون نویمان⁴⁴ ادامه ی معادله (۴.۱) به سیستم های کوانتومی است و برابر است با:

$$S = -\text{tr} \rho \ln \rho = -\sum \rho_i \ln \rho_i \quad (4.13)$$

S اندازه گیری کمی مقدار مخلوط بودن یک حالت کوانتومی است [12]. حالت خالص آنتروپی صفر دارد در حالی که حالت های میکس آنتروپی بیش از صفر دارند. آنتروپی فون نویمان میزان درهم تنیدگی بین زیرحالت های کوانتومی را کمی می کند. برای نشان دادن این وضعیت بیاید یک حالت خالص را با ماتریس چگالی $\rho_{total} = |\psi\rangle\langle\psi|$ در نظر بگیریم. از آنجا که این حالت خالص است، باید آنتروپی فون نویمان برابر با صفر داشته باشد. با این حال بیاید سیستم را به دو قسمت A و B تقسیم کنیم. فضای هیلبرت نیز که حاوی حالت هاست به دو

⁴². pure state

⁴³. mixed state

⁴⁴. von Neumann entropy

قسمت تقسیم می شود: $\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. اگر یک مشاهده گر فقط بتواند به زیرحالت A دسترسی پیدا کند، ماتریس چگالی زیر را اندازه گیری می کند [13]

$$\rho_A = tr_B \rho_{total} \quad (4.14)$$

tr_B نشان می دهد که تریس روی $\mathcal{H}_b$ است. آنتروپی فون نویمان ρ_A درهم تنیدگی زیرحالت A را تعریف میکند [13]

$$S_A = -tr_A \rho_A \ln \rho_A \quad (4.15)$$

آنتروپی درهم تنیدگی نکته ای بسیار مهم را درباره نحوه رفتار متفاوت آنتروپی در سیستم های کوانتومی نشان می دهد. آنتروپی S یک سیستم، طبق تعریف شانون، نمی تواند کمتر از آنتروپی هیچ یک از اجزای سازنده آن باشد، در حالی که آنتروپی فون نویمان برای یک سیستم درهم تنیده (به عنوان مثال یک جفت بل) دارای آنتروپی کل برابر با صفر است اما آنتروپی زیرحالت ها بیشتر از صفر خواهد بود. [14]

۴.۲ انداختن یک بیت از اطلاعات در سیاه چاله

حال یک بیت اطلاعات را در سیاه چاله می اندازیم؛ چگونه مساحت افق رویداد آن تغییر می کند. اما چگونه می توان یک بیت اطلاعات را در سیاه چاله انداخت؟ اگر یک بیت را مثلاً به وسیله ی ۱ یا ۰ که روی یک کاغذ نوشته شده رمزگذاری کنیم و سپس آن را به سیاهچاله بیندازیم، این کار کافی نیست زیرا علامت روی کاغذ خود از تعداد زیادی از اتم تشکیل شده است. راه حل این است که از یک ذره ی بنیادی استفاده کنیم، مثلاً یک فوتون. با این حال، همانطور که ساسکیند⁴⁵ اشاره کرده، اگر ما از محل ورود به سیاهچاله اطلاع داشته باشیم، یک فوتون می تواند بیش از یک بیت اطلاعات را رمزگذاری کند. با استفاده از یک فوتون از طول موج مرتبه ی شعاع شوارتزشیلد سیاه چاله منجر به این سناریو می شود که یک فوتون در محلی از افق رویداد وارد سیاهچاله شده است، اما مشخص نیست که در کجا این یک بیت از اطلاعات را رمزگذاری می کند. [15]

با استفاده از رابطه پلانک - انیشتین $E = hf$ و انیشتین $E = mc^2$ در می یابیم که انرژی فوتون که طول موج آن برابر شعاع شوارتزشیلد R_s برابر است با:

$$E = \frac{hc}{R_s} \quad (4.16)$$

⁴⁵. Susskind

و اینکه پس از ورود فوتون به سیاهچاله، انرژی آن به اندازه $\frac{h}{cR_s} = \frac{E}{c^2}$ افزایش یافته است. بنابراین، افزایش شعاع افق رویداد است (بازگرداندن موقت واحدها):

$$\Delta R_s = \frac{2Gh}{c^3 R_s} \quad (۴.۱۷)$$

از فرمول افق رویداد $A = 4\pi R_s^2$ می فهمیم که مساحت افق رویداد به اندازه زیر افزایش می یابد

$$\begin{aligned} \Delta A &= 4\pi(R_s + \Delta R_s)^2 - 4\pi R_s^2 \\ &= 4\pi \left(R_s^2 + \frac{4Gh}{c^3} R_s + \frac{4G^2 h^2}{c^6 R_s^2} \right) - 4\pi R_s^2 = \frac{16\pi Gh}{c^3} \\ &= 16\pi \ell_p^2 \end{aligned} \quad (۴.۱۸)$$

که در آن $\frac{G^2 h^2}{c^6 R_s^2}$ ناچیز و قابل چشم پوشی است و ℓ_p^2 مربع طول پلانک است. از این رو تا ضریب 16π هر بار که یک بیت اطلاعات در آن قرار می گیرد، مساحت یک سیاهچاله با یک ناحیه پلانک افزایش می یابد. این نشان می دهد که مساحت یک افق سیاهچاله اندازه گیری شده در واحدهای پلانک متناسب با آنتروپی آن است (اطلاعات پنهان) که در بیت اندازه گیری می شود: بنابراین این محاسبه بسیار اساسی (فرمول معروف بکنشتاین $S = A/4$) را نشان می دهد (تا یک عامل عددی). همانطور که ساسکیند به یاد می آورد: اطلاعات برابر است با مساحت [۲۸]؛ این همان پیوند بین اطلاعات و آنتروپی است.

فصل پنجم: پارادوکس اطلاعات

۵.۱ نمایشی از پارادوکس اطلاعات

در این بخش $c = \hbar = G = k_B = 1$

پارادوکس اطلاعات سیاه چاله را می توان به شرح زیر بیان کرد:

یک جسم را در حالت خالص در نظر بگیرید که برای تشکیل یک سیاهچاله رمبش می کند. پس از اینکه این سیاهچاله به طور کامل تبخیر شد و فقط تابش حرارتی هاوکینگ باقی ماند، نتیجه کل فرایند این خواهد بود که یک حالت کوانتومی در ابتدا خالص به حالت میکس تبدیل شده است. این فرآیند حالت خالص تا میکس یکانی نیست و بنابراین یک اصل اصلی مکانیک کوانتومی را نقض می کند.

مکانیک کوانتومی بیان دارد که حالت اولیه بر اساس ماتریس S تکامل یابد $|\Psi_{final}\rangle = S|\Psi_{initial}\rangle$. یکانی بودن ماتریس S نشان می دهد که تکامل قطعی است و نشان می دهد که حالت اولیه را می توان از حالت نهایی بازیابی کرد $|\Psi_{initial}\rangle = S^\dagger |\Psi_{final}\rangle$. به عنوان مثال، اگر تمام تابش هاوکینگ جمع آوری شود، این امر به ما امکان می دهد محاسبه کنیم که چه ماده اولیه ای آن را تشکیل داده است. [۱۶]

قبل از پارادوکس اطلاعات، معمایی را که ماتور⁴⁶ [۱۶] آن را "معمای آنتروپی" می نامد بررسی می کنیم: میکرواستیت سیاهچاله که عامل آنتروپی نهایی آن هستند کدامند؟ ما در انتهای بخش ۴.۲ دیدیم که آنتروپی بکنشتاین یک سیاهچاله برابر است با یک چهارم مساحت آن:

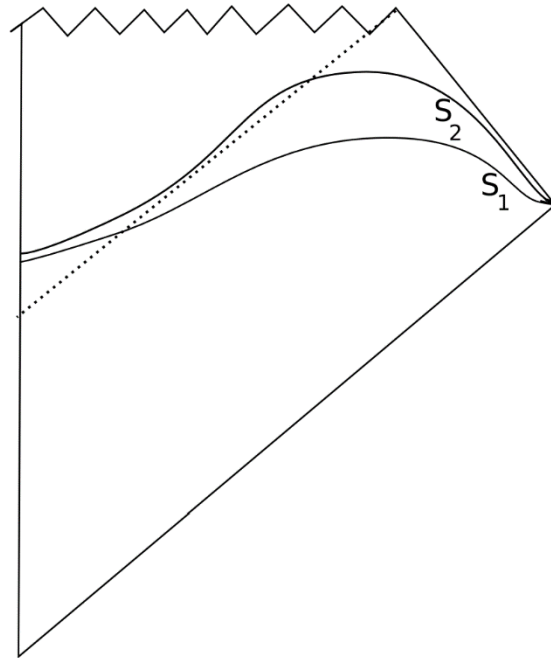
$$S = \frac{A}{4} \quad (5.1)$$

اما آنتروپی بکنشتاین از کجا نشأت می گیرد؟ از نظر مکانیک آماری، تعداد میکرواستیت ها به ازای هر ماکرواستیت در یک سیستم با آنتروپی S از مرتبه e^S خواهد بود. برای یک سیاهچاله نسبتاً کوچک، با جرم M از مرتبه M جرم خورشید، تعداد میکرواستیت ها از مرتبه $10^{10^{77}}$ خواهد بود اما به نظر می رسد که آنها باید دارای میکرواستیت های بسیار کمی باشند. [۱۷] اما این میکرواستیت ها می توانند چه باشند: [۱۸]

- میکرواستیت های سیاهچاله ممکن است ترکیبی ماده داخلی و حالات گرانشی باشد که سیاه چاله ای دارای جرم، تکانه M زاویه ای و بار را تشکیل می دهند. [۱۹]

⁴⁶. Mathur

- یک گاز کوانتومی درست خارج از افق رویداد وجود دارد که آنتروپی آن برابر آنتروپی بکنشتاین حفره است. [۲۰]
- آنتروپی ممکن است از درهم تنیدگی بین میدان های کوانتومی در داخل و خارج افق ناشی شود.



شکل 5.1: نمودار پروزه، برش فضا-زمان سیاه چاله ی تشکیل شده از فروریختن ماده ی در حال سقوط به داخل سیاه چاله.

در بررسی تبخیر سیاهچاله، برش هایی در فضا-زمان حاوی سیاهچاله (شکل ۵.۱) که از افق رویداد عبور می کند را به وجود می آوریم و به وسیله ی آن ها جفت های هاوکینگ و درهم تنیدگی آنها را بررسی می کنیم. [۲۱]

- حالات کوانتومی که ما در حال مطالعه آن هستیم باید کاملاً در یک برش فضایی قرار گیرد که انحنای

ذاتی⁴⁷ آن $R^{(3)} \ll \frac{1}{l_p^2}$ در همه جا کوچکتر از مقیاس پلانک است:

- برش فضایی باید در فضا زمان ۱+۳ بعدی با انحنای بیرونی⁴⁸ کوچک تعبیه شود: $K \ll \frac{1}{l_p^2}$

- در همسایگی برش فضایی، چهار انحنای⁴⁹ فضا-زمان نیز باید کوچک باشد: $R^{(4)} \ll \frac{1}{l_p^2}$

- هر جسمی که روی برش وجود دارد نباید به مقیاس پلانک نزدیک شود به علت اثرات گرانش کوانتومی.

⁴⁷. intrinsic curvature

⁴⁸. Extrinsic curvature

⁴⁹. four-curvature

• حالت‌های یک برش به آرامی به یک برش دیگر تبدیل می شود.

با تغییر شکل برش های فضایی، جفت هاوکینگ بر روی برش ها ایجاد می شود. این جفت ها دارای طول موجی از مرتبه ی شعاع شوارتزیلد است. فرض کنید که حالت تولید جفت درهم تنیده تولید شده به شکل ساده ی زیر باشد [۲۱]

$$|\psi\rangle_{pair} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c|0\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c|1\rangle_b \quad (5.2)$$

جایی که ذرات b به سمت بی نهایت می روند (به عنوان تابش هاوکینگ تشخیص داده می شود) و حالت C به سمت تکینگی سقوط می کند. ماده ی $|\psi\rangle_{matter}$ که سیاه چاله را تشکیل می دهد نیز در برش فضایی وجود دارد اما می توان تصور کرد که آنقدر دور است که تأثیر ناچیزی بر جفت هاوکینگ دارد

حالت کوانتومی $|\Psi\rangle$ توصیف ماده تشکیل دهنده سیاه چاله و جفت در نهایت به صورت زیر داده میشود:

$$|\Psi\rangle \approx |\psi\rangle_{matter} \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c|0\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c|1\rangle_b \right) \quad (5.3)$$

که تقریبی است زیرا به دلیل تأثیر ناچیز $|\psi\rangle_{matter}$ را به عنوان یک سیستم کوانتومی در حالت زیر آماده سازی میکنیم:

$$|\psi\rangle_{matter} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_{matter} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_{matter} \quad (5.4)$$

که با جایگذاری در (۵.۳) داریم:

$$|\Psi\rangle \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_{matter} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_{matter} \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c|0\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c|1\rangle_b \right) \quad (5.5)$$

برای تبخیر سیاهچاله ها، راه حل شوارتزیلد (۲.۱)، با وجود اینکه مستقل از زمان است، معتبر است، زیرا تبخیر بیشتر از عمر جهان زیادی طول می کشد. بنابراین راه حل شوارتزیلد تا زمانی که شعاع سیاهچاله به طول پلانک کاهش یابد، صدق میکند. برش های فضا مانند در فضا-زمانی نباید تکینگی مرکز سیاه چاله وجود داشته باشد. بیایید این برش ها را با تقسیم آنها به قسمتهای خارج، داخل و مکان اتصال در راستای افق به طور دقیق تعریف کنیم:

داخل افق سیاه چاله: $\Sigma_I: \frac{M}{2} < r < \frac{3M}{2}$ و $r = \text{constant}$ می تواند به آرامی در زمان هایی قبل از شکل گیری تکینگی به مبدا شوارتزچیلد $r = 0$ متصل شود.

خارج از افق سیاه چاله: $\Sigma_O: r \gg 4M$ و $t = \text{constant}$

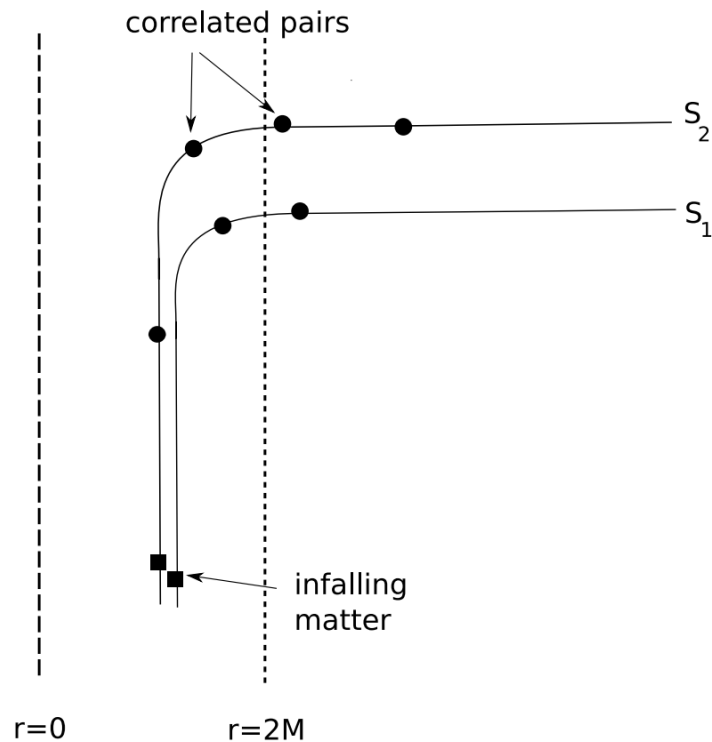
اتصال در راستای افق: Σ_C افق داخل Σ_I و خارج سیاه چاله Σ_O را به هم متصل میکند. ابعاد فضا و زمان Σ_C از مرتبه M هستند.

برش فضایی تعریف شده در بالا ممکن است عجیب به نظر برسد زیرا در خارج از افق با $t = \text{constant}$ (همانطور که انتظار می رود) و در حالی که در داخل افق با $r = \text{constant}$ تعریف می شود. این امر صرفاً در نتیجه مشکل در متریک شوارتزچیلد در افق است در جایی که زمان و مکان نقش های خود را جا به جا می کند.

یک برش کامل فضایی $\Sigma(t, r, C)$ توسط اتحاد $\Sigma_I \cup \Sigma_O \cup \Sigma_C$ داده شده است. با حرکت به جلو پارامترها، به طور آهسته از یک برش به برش دیگر تغییر پیدا می کند.

$$\Sigma_1 = \Sigma(t_1, r_1, C_1) \rightarrow \Sigma_2 = \Sigma(t_2, r_2, C_2) = \Sigma(t_1 + \delta t, r_1 + \delta r, C_1 + \delta c) \quad (5.6)$$

هنگام حرکت به جلو در برش های فضایی، می توان هندسه Σ_C را تا زمانی که $\delta r \ll M$ بدون تغییر و ثابت در نظر گرفت. این امر باعث می شود بخش های Σ_I طولانی تر شوند در حالی که Σ_O به جلو حرکت می کند (شکل ۵.۲). کنار هم گذاشتن این برش های فضایی، کل فضایی را در بر می گیرد که حاوی سیاه چاله است. تکامل برش ها در یک مسیر زمانگونه، هندسه ی هر دو Σ_I و Σ_O (اگرچه کشیده می شود) تغییر نمی دهد، با این حال، بخش اتصال Σ_C باید رشد کند تا این دو بخش را به هم متصل کند. [۲۱]



شکل 5.2: کش آمدن برش ها در تکامل سیاه چاله

این کشش Σ_C علت ایجاد زوج هاوکینگ است و اکنون می توانیم ببینیم که چرا فقط می تواند در حضور یک سیاه چاله اتفاق می افتد و چرا در فضا-زمان مینکوفسکی اتفاق نمی افتد. در فضا-زمان مسطح Σ_C سرانجام صفر⁵⁰ می شود و سپس به زمانگونه تبدیل می شود، اما به دلیل جا به جا شدن مختصات زمان و مکان در افق رویداد، برش ها در طول تکامل خود فضاگونه باقی می ماند و تولید جفت هاوکینگ بدون مانع تا رسیدن به ابعاد پلاتک سیاهچاله ادامه می یابد. [۲۱]

حال بررسی می کنیم که درهم تنیدگی جفت هاوکینگ با تبخیر مداوم سیاهچاله چگونه تغییر می کند. این نکته نکته ای است کلیدی در درک تفاوت تابش هاوکینگ با تابش حرارتی که معمولاً توسط اجسامی مانند یک تکه ذغال سنگ ساطع می شود. این اجسام تابش را به گونه ای منتشر می کنند که در اصل به حفظ و بازیابی اطلاعات منجر می شود. مجموعه ای از برش های فضاگونه با افزایش زمان:

⁵⁰. null

برش ۱: مجموعه ای از $|\psi\rangle_{matter}$ روی برش وجود دارد اما هنوز فرو نریخته است تا سیاهچاله را تشکیل دهد
 برش ۲: سیاهچاله اکنون شکل گرفته است. "وسط" برش برای ایجاد اولین جفت هاوکینگ کشیده میشود همانند
 (۵.۳)

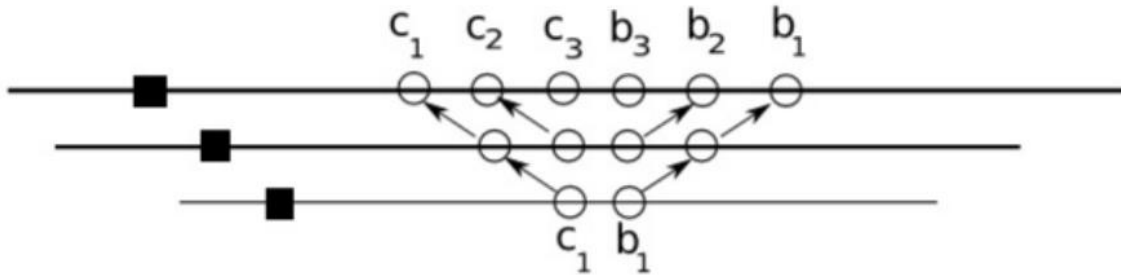
$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{matter} \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_c |0\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_c |1\rangle_b \right) \quad (۵.۷)$$

آنتروپی درهم تنیدگی بین تابش هاوکینگ و بقیه سیستم برابر $\ln 2$ است با فرض اینکه $|\psi\rangle_{matter}$ یک سیستم کوانتومی ساده دو سطحی بود (۵.۴).

برش ۳: $|\psi\rangle_{matter}$ تغییر نمی کند و جفت b_1 و c_1 به سمت بیرون رانده می شود همانند شکل ۵.۳. با کش آمدت Σ_c که همچنین باعث ایجاد یک جفت جدید هاوکینگ b_2 و c_2 را می شود، حالت کوانتومی کامل را به وجود می آورد برش:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{matter} \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_1} |0\rangle_{b_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_1} |1\rangle_{b_1} \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_2} |0\rangle_{b_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_2} |1\rangle_{b_2} \right) \quad (۵.۸)$$

با آنتروپی درهم تنیدگی $2 \ln 2$ بین تابش هاوکینگ و بقیه ی سیستم.



شکل 5.3: جفت های اولیه ی هاوکینگ از افاق به سمت خارج رانده میشوند. مربع مشکی نشان دهنده ی $|\psi\rangle_{matter}$ است [21]

برش $N + 1$: در حد $n + 1$ امین برش N جفت هاوکینگ ایجاد شده است:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = |\psi\rangle_{matter} \otimes & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_1} |0\rangle_{b_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_1} |1\rangle_{b_1} \right) \\ & \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_2} |0\rangle_{b_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_2} |1\rangle_{b_2} \right) \otimes \dots \\ & \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_n} |0\rangle_{b_n} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_n} |1\rangle_{b_n} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

که باعث میشود آنتروپی بین تابش هاوکینگ و بقیه ی سیستم برابر $N \ln 2$ است.

هنگامی که سیاهچاله تمام جرم خود را در تابش هاوکینگ ساطع کرد، تنها یک میدان تابشی باقی می گذارد که با $b_1, b_2, \dots, b_n$ در بالا نشان دادیم. تابش نهایی هاوکینگ دارای آنتروپی درهم تنیدگی $N \ln 2$ است اما با هیچ چیزی درهم تنیده نیست. بنابراین تابش را فقط می توان با یک ماتریس چگالی توصیف کرد، اکنون حالت میکس است. قبل از اینکه سیاهچاله به طور کامل تبخیر شود، تابش هاوکینگ با حالات داخلی درهم تنیده بود و بنابراین کل سیستم کوانتومی دارای آنتروپی فون نویمان صفر و خالص بود.

اگرچه تبدیل حالت خالص به حالت میکس، یکانی بودن را نقض می کند، اما این همیشه به معنای از دست دادن اطلاعات نیست - همانطور که در ماتور [۲۱] در زمینه تبخیر سیاهچاله ها تأکید شده است. در برخی موارد، یک میدان تشعشی هاوکینگ میکس می تواند شامل تمام اطلاعات مربوط به ماده ای باشد که این سیاه چاله را ایجاد کرده است، و از سوی دیگر یک حالت خالص نهایی می تواند منجر به از دست رفتن اطلاعات شود. بیا بید به چند مثال نگاه کنیم، ابتدا فرایندی که یکانی بودن را نقض می کند اما اطلاعات را حفظ می کند. شروع با حالت کوانتومی

$$|\psi\rangle_{matter} = \alpha |1\rangle_{matter} + \beta |0\rangle_{matter} \quad (5.10)$$

پس از فرو ریختن این ماده برای ایجاد یک سیاهچاله و به وجود آمدن دو جفت هاوکینگ (b_1, c_1) و (b_2, c_2) در خلا، حالت کوانتومی سیستم تبدیل می شود به:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{matter} |0\rangle_{c_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{matter} |1\rangle_{c_1} \right) \otimes (\alpha |1\rangle_{b_1} + \beta |0\rangle_{b_1}) \\ & \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_2} |0\rangle_{b_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_2} |1\rangle_{b_2} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

اولین ذره تابش هاوکینگ b_1 شامل تمام اطلاعات مربوط به ماده ای است که برای تشکیل سیاه چاله فرو ریخته است. این می تواند توسط یک ناظر بازیابی شود و اطلاعات از بین نمی رود. با این حال، دومین ذره تابشی هاوکینگ b_2 با c_2 در داخل سیاهچاله درهم تنیده است. بنابراین پس از اینکه سیاه چاله به طور کامل تبخیر شد، حالت نهایی میکس است و ما یکانی بودن تکامل کوانتومی را نقض کرده ایم.

اگر یک سیستمی داشته باشیم که مشکل مخالف این داشته باشد چطور؟ اگر حالت اولیه ی ماده (ψ, ϕ) اکنون به یک سیاهچاله تبدیل شود که تا کنون یک جفت هاوکینگ (b, c) را تولید کرده است:

$$(\alpha|1\rangle_{matter}|0\rangle_c + \beta|0\rangle_{matter}|1\rangle_c) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_b \right) \quad (5.13)$$

در نتیجه ذره تابشی هاوکینگ b در حالت خالص وجود دارد اما هیچ اطلاعاتی در مورد ماده اولیه ی ما ندارد. دو تحولی که ما به آنها نگاه کردیم مدل اسباب بازی هستند و نمی توانند ناشی از فرایندهای نیمه کلاسیک در تبخیر سیاه چاله واقعی باشند [۷]. تبخیر معمولی سیاهچاله ها هر دو موضوعی که در بالا نشان داده شده است وجود دارد-غیر واحد بودن و از دست دادن اطلاعات-و برای یافتن راه حلی برای هر دو پارادوکس اطلاعات نیاز به راه حل رضایت بخشی است.

۵.۲ راه حل های پیشنهاد شده

در این بخش تعدادی راه حل احتمالی برای پارادوکس اطلاعاتی که در چند دهه گذشته ارائه شده است را بررسی می کنیم.

۵.۲.۱ باقیمانده⁵¹

به نظر می رسد نقطه ای که سیاهچاله از بین می رود باعث رفتن از حالت خالص به حالت میکس می شود. این نظریه بیان می کند که هنگامی که سیاه چاله به جرم پلانک برسد، روند تبخیر هاوکینگ متوقف می شود و "باقی مانده ای" باقی می ماند. [۲۲] این امر یکانی بودن را حفظ میکند اما از آنجا که باقی مانده با آنترپی $N \ln 2$ با تابش در هم تنیده است، باید حداقل N حالت داخلی داشته که سایز و انرژی محدودی داشته باشد. از آنجا که N

⁵¹. Remnant

مقداری دلخواه است و محدود نیست، بقایا می تواند بر خلاف حالت‌های کوانتومی دارای تبه گنی دلخواهی باشد. [۲۱]

۵.۲.۲. سفید کردن^{۵۲}

سفید کردن نشان می دهد که در یک سیستم کوانتومی به نوعی از ورود اطلاعات به سیاهچاله جلوگیری می شود . یا به عبارتی افق آن را "سفید" می کند. احتمالاً اطلاعات را از انرژی و اندازه حرکت سیستم جدا کرده و اجازه می دهد در تابش هاوکینگ خارج شود. می دانیم که یک سیاه چاله الکترون را جذب می کند پس درست بودن این نظریه باعث می شود که نظریه ی خالی بودن افق نقض شود چون باید در افق اتفاق فیزیکی ای باشد که از قبل از وارد شدن به سیاه چاله، انرژی و اندازه حرکت سیستم جدا کرده و اجازه دهد که تابش هاوکینگ خارج شود. [۱۸]

۵.۲.۳. نظریه ی پیچ^{۵۳}

اگر دو سیستم A و B را به ترتیب به ابعاد m و n داشته باشیم، به طوری که $m \leq n$ ، اگر آنتروپی هر سیستم را مطابق ۴.۱۵ به دست آوریم، سه آنتروپی سیستم یعنی S_A و S_B و S_{AB} از رابطه ی مثلثاتی تبعیت می کند یعنی در $S_A + S_B > S_{AB} = -\text{tr} \rho \ln \rho$ پیچ در مقاله ی خود [23] مقدار میانگین آنتروپی را بر روی تمام حالت های خالص $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ را به صورت $\langle S_A \rangle$ به دست آورد. در ادامه کمیتی به نام میانگین اطلاعات زیرسیستم را طبق زیر تعریف کرد:

$$I_{m,n} \equiv S_{\max} - \langle S_A \rangle = \ln m - S_{m,n} \quad (۵.۱۴)$$

پیچ با استفاده از داده های قبلی Lubkin and liyd and paegls مقدار زیر را به دست آورد:

$$P(p_1, \dots, p_m) dp_1 \dots dp_m = N \delta \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq m} (p_i - p_j)^2 \prod_{k=1}^m p_k^{n-m} dp_k \quad (۵.۱۵)$$

که در آن p_i ویژه مقدار ρ_A و N ضریب نرمالیزاسیون، به گونه ای که احتمال کل برابر یک باشد. سپس پیچ نشان داد که:

^{۵۲}. Bleaching

^{۵۳}. Don. N. Page

$$S_{m,n} = - \int \left(\sum_{i=1}^m p_i \ln P_i \right) P(p_1, \dots, p_m) dp_1 \dots dp_m \quad (5.16)$$

$$= \psi(mn + 1) - \frac{\int (\sum_{i=1}^m q_i \ln q_i) Q(q_1, \dots, q_m) dq_1 \dots dq_m}{mn \int Q dq_1 \dots dq_m}$$

که در آن $q_i = r p_i$ و r یک مقدار مثبتی است و

$$\psi(mn + 1) = -C + \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{k} \quad (5.17)$$

که C در آن ثابت اویلر است. در ادامه پیچ برای $m=2, 3, 4, 5$ پیچ با استفاده از mathematica به دست آورد:

$$S_{mn} = \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{2n} \quad (5.18)$$

اما نتوانست آن را اثبات کند. اکنون تلاش می کنیم این مقدار را به دست آوریم:

دترمینان ماتریس وندروموند⁵⁴ توسط $\Delta(q_1, \dots, q_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (q_i - q_j)$ داده میشود و میتوان آن را به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\Delta(q_1, \dots, q_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{m-1} & q_2^{m-1} & \dots & q_m^{m-1} \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

می دانیم که اگر ضریبی از یک ردیف ماتریس با آن ردیف جمع بشود، دترمینان ماتریس تغییری نمی کند. پس $p_k(q)$ تعریف می کنیم به صورتی که $p_0(q) = 1$ و

$$p_k(q) = q^k + C_{k-1} q^{k-1} + \dots + C_0 ; \quad k = 1, \dots, m-1 \quad (5.20)$$

⁵⁴. (Vandermonde matrix)

که معادله ی دلتا را به صورت زیر در می آورد:

$$\Delta(q_1, \dots, q_m) = \begin{vmatrix} l_0(q_1) & l_0(q_2) & \dots & l_0(q_m) \\ p_1(q_1) & p_1(q_2) & \dots & p_1(q_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m-1}(q_1) & p_{m-1}(q_2) & \dots & p_{m-1}(q_m) \end{vmatrix} \quad (5.22)$$

حال چندجمله ای $p_k^\alpha(q)$ را معرفی می کنیم و آن را به گونه ای تعریف می کنیم که:

$$p_k^\alpha(q) = q^k + C_{k-1}q^{k-1} + \dots + C_0^\alpha, \quad p_0^\alpha(q) = 1 \quad .1$$

$$\int_0^\infty dq e^{-q} q^\alpha p_{k_1}^\alpha(q) p_{k_2}^\alpha(q) = h_k^\alpha \delta_{k_1 k_2} \quad .2$$

$p_k^\alpha(q)$ به چند جمله ای لاگور⁵⁵ معروف هستند که به 2 صورت زیر تعریف می شوند:

$$p_k^\alpha(q) = \frac{e^q}{q^\alpha} (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} (e^{-q} q^{k+\alpha}) \quad (5.23)$$

$$p_k^\alpha(q) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha-r+1)} q^{k-r} \quad (5.24)$$

چندجمله ای های لاگور در روابط زیر نیز صدق می کند:

$$\int_0^\infty dq e^{-q} q^\alpha p_{k_1}^\alpha(q) p_{k_2}^\alpha(q) = \Gamma(k_1+1) \Gamma(k_1+\alpha+1) \delta_{k_1 k_2} \quad (5.25)$$

$$\int_0^\infty dq q^{\alpha-1} p_k^b(q) = (1-a+b)_k \Gamma(\alpha) (-1)^k \quad (5.26)$$

$$; (1-a+b)_k = (1-a+b)(1-a+b+1) \dots (1-a+b+k-1)$$

با استفاده از معادله ی (5.19) و نوشتن $\Delta(q_1, \dots, q_m)$ بر حسب $p_k^\alpha(q)$ به دست می آوریم:

$$S_{mn} = \psi(mn+1) - \int_0^\infty \frac{e^{-q} (q \ln q) q^{n-m} (p_k^{m-n}(q))^2 dq}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+1+n-m)} \quad (5.27)$$

⁵⁵. laguerre polynomials)

حال باید حاصل انتگرال $I_{n,m}^k = \int_0^\infty e^{-q} (q \ln q) q^{n-m} (p_k^{m-n}(q))^2 dq$ را به دست آوریم. بدین منظور ابتدا انتگرال جدیدی را معرفی میکنیم:

$$\begin{aligned} J^k(\alpha) &= \int_0^\infty q^{\alpha+1} (p_k^\alpha(q))^2 e^{-q} dq \\ &= \Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+2) + k^2\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha+1) \end{aligned} \quad (5.28)$$

که با استفاده از آن می توانیم بنویسیم:

$$I_{n,m}^k = \left[\frac{dJ^k(\alpha)}{d\alpha} - 2 \int_0^\infty q^{\alpha+1} e^{-q} p_k^\alpha \frac{dp_k^\alpha}{d\alpha} dq \right]_{\alpha=n-m} \quad (5.29)$$

با استفاده از معادلات 5.24، 5.25، 5.26 و 5.28 و $\psi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{d\Gamma(z)}{dz}$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \psi(mn+1) - \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} [1 + (1+2k+n-m)\psi(k+n-m+1)] \\ &\quad + \frac{2}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^{k+r} \frac{\Gamma(k+n-m+1)}{\Gamma(k+n-m-r+1)} \\ &\quad \times [\psi(k+n-m+1) - \psi(k+n-m-r+1)] \\ &\quad \times \frac{(r-k-1)_K \Gamma(k+n-m-r+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n-m+1)} \end{aligned} \quad (5.30)$$

با جایگذاری $\psi(k+n-m+1) = -C + \sum_{r=1}^{k+n-m} \frac{1}{r}$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^{k+r} \frac{\Gamma(k+n-m+1)}{\Gamma(k+n-m-r+1)} \\
& \times [\psi(k+n-m+1) - \psi(k+n-m-r+1)] \\
& \times \frac{(r-k-1)_K \Gamma(k+n-m-r+2)}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n-m+1)} \\
& = \frac{2}{mn} \sum_{r=0}^{m-1} \binom{k}{1} (-1)^{2k+1} = -2 \frac{m-1}{2n}
\end{aligned} \tag{۵.۳۱}$$

در نهایت با دانستن این که $(r-k-1)_K = 0$ به جز در مقادیر صفر و یک ($r \neq 0$ و $r \neq 1$) و استفاده از $\psi(k+n-m+1) - \psi(k+n-m-r+1) = 0$ در $r=0$ به دست می آوریم:

$$S_{m,n} = \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{2n} \tag{۵.۳۲}$$

برمی گردیم دوباره به مقاله ی پیچ، که مقدار S_{mn} را برای مقادیر $1 \ll m \leq n$ با مقدار زیر تقریب میزند:

$$S_{m,n} = \ln m - \frac{m}{2n} \tag{۵.۳۳}$$

پیچ در مقاله ی بعدی اش، [24] نشان میدهد که برای اینکه اطلاعات از سیاه چاله یا بسیار کند بیرون می آید و یا آنقدر پراکنده خواهند بود که در محاسبات به دست نمی آید.

یکانی بودن تکامل سیاه چاله نشان دهنده ی این است که اگر ماده ای به سیاهچاله تبدیل شود و در حالت خالص قرار بگیرد، سیاهچاله و تابش هاوکینگ اطراف آن دو زیر سیستم یک سیستم ترکیبی هستند که در حالت خالص نیز هستند. برای کنترل کردن بعد فضای هیلبرت، ما تصور می کنیم که یک سیاه چاله را در یک جعبه در حالت خالص تابش و یا ماده به دست می آوریم. ما بعد تمام فضای هیلبرتی (بعد سیاه چاله و تابش) را mn در نظر می گیریم که در آن m بعد تابش است که $m \sim e^{S_r}$ هست که S_r آنتروپی تابش ترمودینامیکی و n بعد سیاه چاله ای است که $n \sim e^{S_B}$ که S_B آنتروپی سیاه چاله است و همان گونه که در فصل قبل دیدیم $S_B = \frac{A}{4}$

اگر B نشان دهنده ی سیستم سیاه چاله، R سیستم تابش و BR برای سیستم خالص نهایی باشد. هر دو سیستم دارای آنتروپی درهم تنیدگی زیر است: [24]

$$\begin{aligned} S_R &= -tr_R(\rho_R \ln \rho_R) \\ S_B &= -tr_B(\rho_B \ln \rho_B) \end{aligned} \quad (5.34)$$

سیستم نهایی RB خالص است پس در نتیجه ی آن $S_{RB} = 0$ می دانیم که بین دو سیستم a و a'

$$|S_a - S_{a'}| \leq S_{aa'} \leq S_a + S_{a'} \quad (5.35)$$

پس در نتیجه خواهیم داشت:

$$|S_B - S_R| \leq S_{BR} \leq S_B + S_R \rightarrow S_B = S_R \quad (5.36)$$

همانگونه که دیدیم اطلاعات در یک سیستم به صورت تفاوت بین مقدار آنتروپی در هم تنیدگی و ماکسیمم مقدار آن است. این تعریف از آنتروپی به عنوان کمبود اطلاعات یاد می کند. پس تابش و سیاه چاله هر دو به میزان زیر اطلاعات حمل می کنند.

$$\begin{aligned} I_R &= \ln m - S_R \approx S_R - S_R \\ I_B &= \ln n - S_B \approx S_B - S_B \end{aligned} \quad (5.37)$$

برای اینکه ببینیم تعریفی که کرده ایم چگونه رفتار میکند، میانگین آن را بر روی تمام حالت های تصادفی خالص سیستم محاسبه میکنیم:

$$\langle I_R \rangle = \ln m + \frac{m-1}{2n} - \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \quad (5.38)$$

همانطور که دیدیم برای $1 \ll m \leq n$ با استفاده از معادله ی (5.32) و (5.33) داریم:

$$\langle I_R \rangle \approx \frac{m}{2n} \approx e^{S_R - S_B} \quad (5.39)$$

با استفاده از دو معادله ی (5.37) و استفاده از $S_B = S_R$ میبینیم که:

$$\ln m - I_R = \ln n - I_B \rightarrow I_B = \ln n - \ln m + I_R \quad (5.40)$$

و با استفاده از معادله ی (5.40) و میانگین گرفتن به دست می آوریم:

$$\langle I_B \rangle = \ln n - \ln m + \frac{m}{2n} \quad (5.41)$$

این نشان میدهد که همه ی اطلاعاتی که حالت خالص کل سیستم را نشان می دهد، $\ln n + \ln m$ در برهمکنش⁵⁶ با زیر سیستم ها است. معادله (5.39) نشان می دهد که برای حالت خالص معمولی کل سیستم، اطلاعات کمی، تقریباً $\frac{m}{2n}$ واحد، در برهمکنش با هم در زیر سیستم کوچکتر وجود دارد و تقریباً $\ln n - \ln m + \frac{m}{2n}$ واحد در برهمکنش با هم درون خود سیستم بزرگتر قرار دارد و باقی مانده که تقریباً $2 \ln m - \frac{m}{n}$ واحد اطلاعات در برهمکنش بین زیر سیستم های بزرگتر و کوچکتر قرار دارد. [24]

اگر $n \leq m$ باشد به طور مشابه به دست می آوریم:

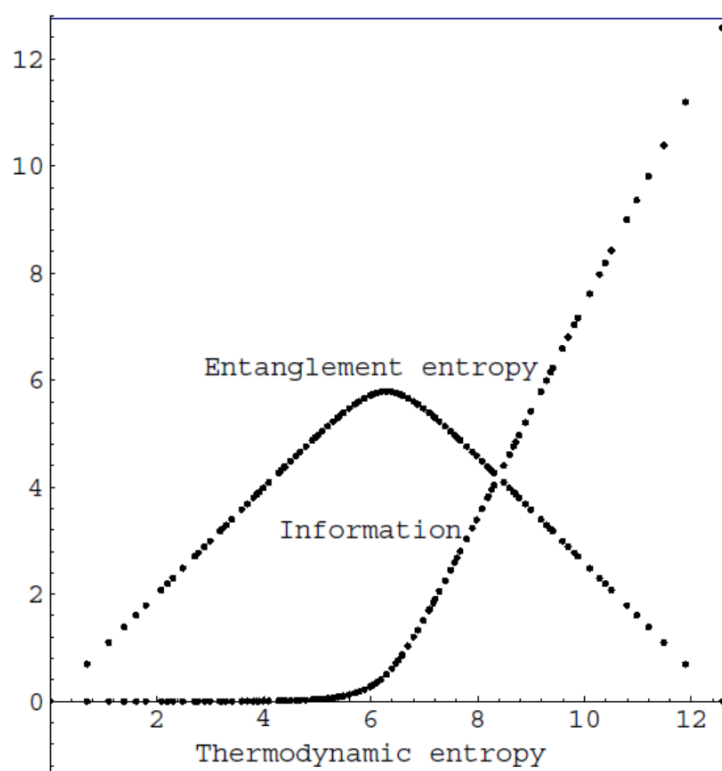
$$\langle I_B \rangle = \ln n + \frac{n-1}{2m} - \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \quad (5.42)$$

و با استفاده از معادله ی (5.40):

$$\begin{aligned} \langle I_R \rangle &= \ln m - \ln n + \left(\ln n + \frac{n-1}{2m} - \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \right) \\ &= \ln m + \frac{n-1}{2m} - \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \approx \ln m - \ln n + \frac{n}{2m} \end{aligned} \quad (5.43)$$

⁵⁶. correlation

در ادامه پیچ، نمودار $\langle I_R \rangle$ و $\langle S_R \rangle$ را برای $mn=291600$ رسم میکند. شکل 5.3



شکل 5.4 نمودار میانگین آنتروپی فون نویمان ($S_R = -\text{tr}_R(\rho_R \ln \rho_R)$) و یا آنتروپی در هم تنیدگی و اطلاعات تابش
($I_R = \ln m - S_R \approx S_R - S_R$) بر مبنای آنتروپی ترمودینامیکی برای حالتی که $mn=291600$

بررسی بالا به ما این امکان را می دهد که به این نتیجه برسیم که وقتی تابش ساطع شده از یک سیاهچاله دارای ابعاد کوچکتر فضایی هیلبرت نسبت به سیاهچاله باقی مانده است، این تابش معمولاً اطلاعات بسیار کمی در خود دارد و تقریباً در ماکسیمالی میکس است⁵⁷. حال موردی را در نظر بگیرید که سیاهچاله بیشتر انرژی خود را از خود ساطع کرده است به طوری که تابش ابعاد بزرگتری دارد. اگر فرد در آن زمان فقط قسمتی از تابش را بررسی کند به طوری که هر قسمت دارای ابعاد کوچکتری نسبت به بقیه سیستم باشد، می توان انتظار داشت که در قسمت های جداگانه فقط مقدار بسیار کمی از اطلاعات را مشاهده کند. اطلاعات کلی در عوض بیشتر در برهمکنش بین همه قسمت ها وجود دارد. از شکل ۵.۳ نیز مشخص است که اطلاعات معمولاً پس از تبخیر حدود نصف آنروپی یک سیاهچاله شروع به بیرون آمدن میکند. [۲۴]

⁵⁷. (maximally mixed)

نیمی از آنتروپی اولیه، زمان لازم برای رسیدن سیاهچاله از حالت اولیه به نقطه ای که شروع به انتشار اطلاعات است که به آن "زمان نگهداری اطلاعات"⁵⁸ یا "زمان پیچ"⁵⁹ نامیده می شود. این نقطه زمانی به وضوح در شکل ۵.۳ قابل مشاهده است. سیاهچاله ای که زمان پیچ خود را پشت سر گذاشته است سیاه چاله قدیمی نامیده می شود.

پس در نتیجه تا زمانی که بخش ثابت آنتروپی سیاهچاله از بین نرفته باشد اطلاعاتی در دست نیست که این به آن معناست که [۲۴]

$$t_{info} \sim \text{Black hole's lifetime} \sim R^3 \quad (۵.۴۴)$$

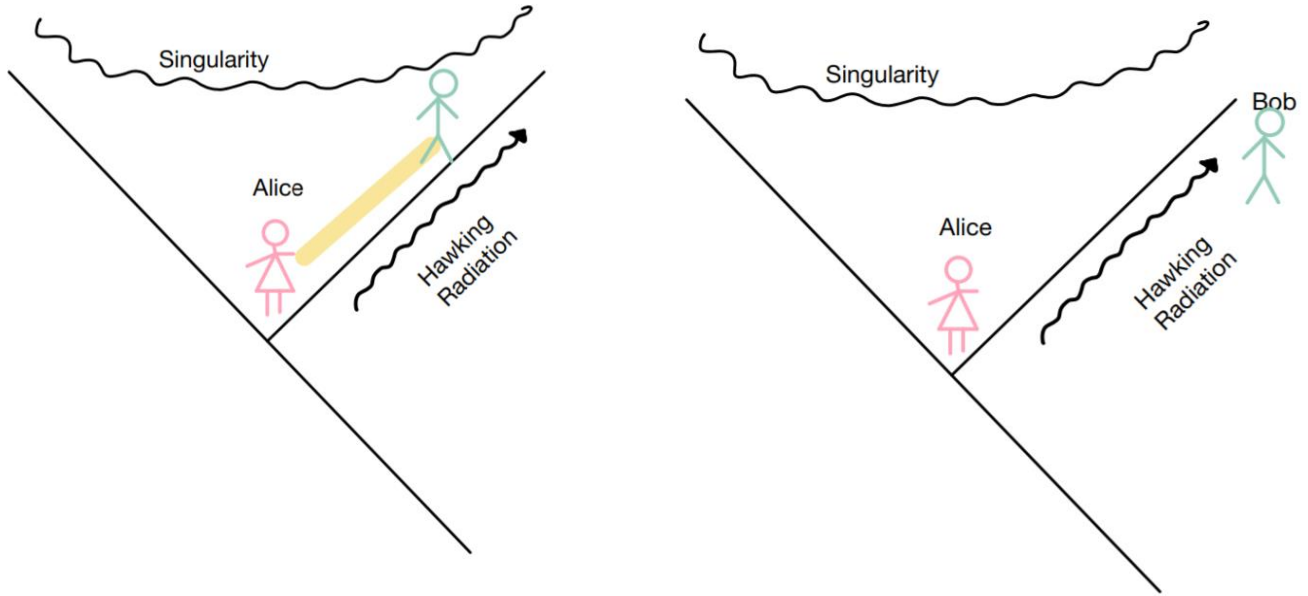
این قسمت برگرفته شده از سخنرانی پاتریک هیدن⁶⁰ است. [25]، [26] و [27]

اکنون آزمایش فکری را دنبال می کنیم. (شکل ۵.۴) آلیس با یک حالت کوانتومی $|\varphi\rangle$ در یک سیاهچاله سقوط می کند و تابش هاوکینگ را به وجود می آورد. مدتی بعد باب در خارج از سیاهچاله می ایستد و به اندازه کافی تابش هاوکینگ را جمع آوری می کند تا حالت $|\varphi\rangle$ را استخراج کند. باب در نهایت به داخل سیاهچاله می رود و به دنبال آلیس می رود تا نتیجه ها را با هم مقایسه کند ولی در این حالت آلیس و باب بدون این که هرگز نتیجه ها را با هم مقایسه کنند به تکینگی می رسند. بنابراین برای مقایسه ی نتیجه ها، آلیس باید نوری را به سمت باب بفرستد و تلاش می کند تا اطلاعات را برای او ارسال کند. هرقدر باب مدت زمان طولانی تری را برای جمع آوری اطلاعات در خارج از سیاه چاله بماند، آلیس زمان کمتری دارد تا اطلاعات را به او بدهد (زیرا هرقدر باب در آینده دورتری در هذلولی باشد نور زمان بیشتری برای رسیدن به آنجا نیاز دارد).

⁵⁸. information retention time

⁵⁹. page time

⁶⁰. Patrick Hayden



شکل 5.4: آلیس داخل سیاه چاله می افتد و پرتوی هاوکینگ ساطع میشود. باب بعد از جمع آوری کافی پرتو داخل سیاه چاله میرود و آلیس سعی میکند اطلاعات را توسط پرتو نور به او منتقل کند.

$$\tau \sim R \exp\left(\frac{-\Delta t}{R}\right) \quad (5.45)$$

Δt تأخیر باب در زمان شوارتزچیلد و τ زمان ویژه آلیس است

آنروپی پیام آلیس باید محدودیتی داشته باشد به گونه ای که فرکانس انرژی بسته ی موج آلیس باید کمتر از جرم سیاهچاله باشد تا هندسه سیاه چاله را از بین نبرد پس $\tau > \frac{1}{M}$.

$$\Delta t < R \log (MR) \xrightarrow{M \sim R} \Delta t < R \log (R) \quad (5.46)$$

بنابراین معادله (5.46) شرط مقایسه ی دو کولون است ولی این مقایسه باعث نقض قضیه ی عدم شبیه سازی⁶¹ می شود. پس برای حفظ این قضیه، ما در پی حالت هایی هستیم که $t_{info} > R \log R$ و به عبارتی حالت هایی که باب و آلیس نمی توانند اطلاعاتشان را با یکدیگر مقایسه کنند.

در ادامه، قضیه ی مکمل بودن سیاه چاله مطرح می شود که بیان می کند توصیف ناظری که در حال سقوط به داخل سیاه چاله است و ناظر خارجی مکمل یکدیگر هستند (مانند مکان و تکانه) و این نتیجه را می دهد که 2 نسخه از ϕ که در داخل و خارج هستند مستقل نیستند و بنابراین شبیه سازی اتفاق نمی افتد و هرگونه آزمایشی

⁶¹. No cloning

برای تشخیص آن است باید به شکست بینجامد. پس ما در پی حالت هایی هستیم که قضیه ی عدم شبیه سازی را رعایت کند و در اصل حالت هایی که $t_{info} \sim R \log R$. اما با مقایسه ی آن با معادله ی (۵.۴۴) که نتیجه ی نظریه ی پیچ است، در این زمان هنوز اطلاعاتی بیرون نیامده است که باب بتواند آن را جمع آوری کند!

اما قبل از آن باید بررسی کنیم که واقعاً منظور ما از این که اطلاعات بیرون می آید چیست؟

اولین آزمایش: (شکل 5.5 الف) سیاه چاله از حالت $|\xi\rangle$ شروع می کند قبل از این که هیچ تابشی را به بیرون بفرستد. از طرفی اطلاعات در حالت $|\varphi\rangle$ داخل سیاه چاله می افتد و در افق سیاه چاله اتفاقی می افتد و در نهایت تابش R از آن خارج می شود و سیاه چاله بعد از تبخیر باقی می ماند. B' .

از اینجا به بعد به جای استفاده از بُعد، از کیوبیت استفاده می کنیم: $M = k, d_M = 2^k$ و به همین ترتیب $B = n - k, R = r, B' = n - r$

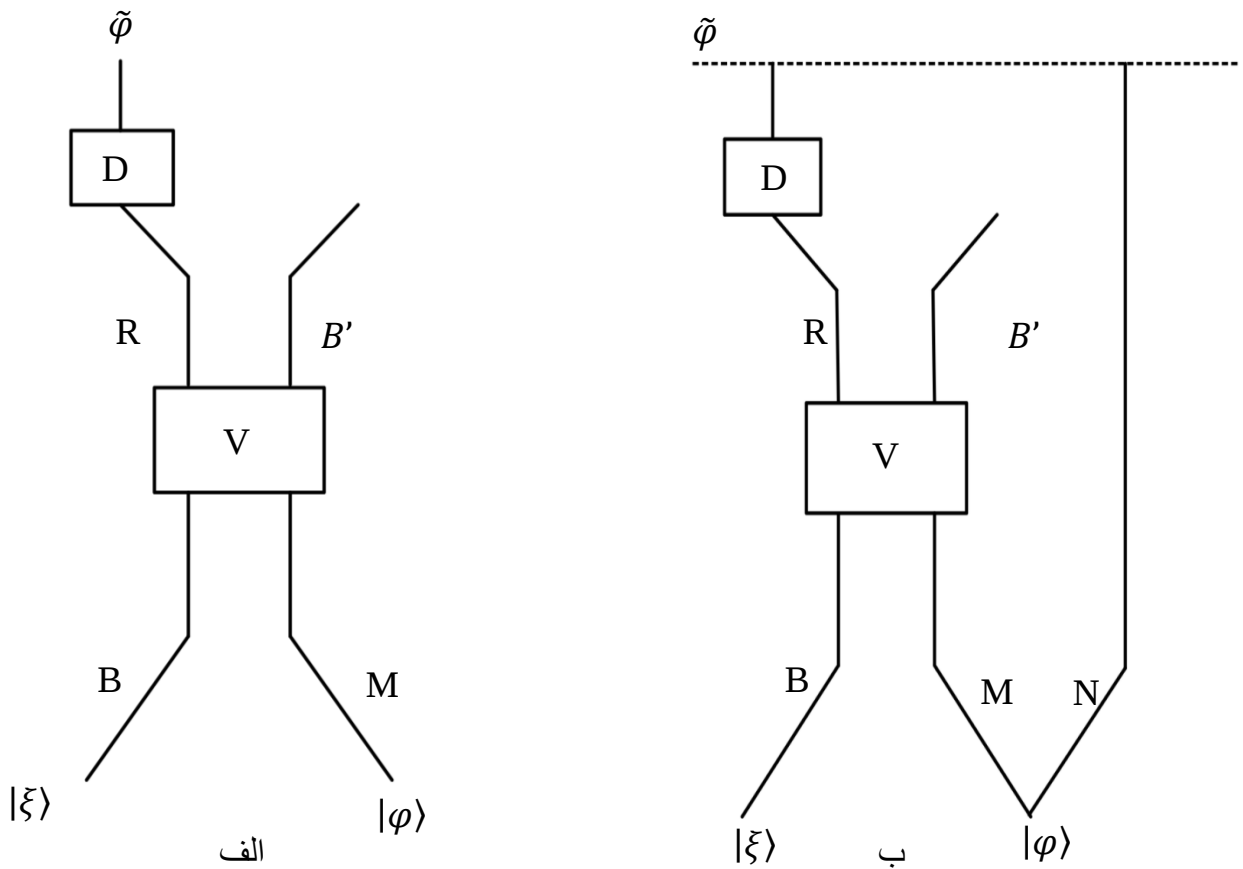
سپس D بر روی تابش خارج شده عمل می کند و یک $\tilde{\varphi}$ به ما می دهد. حال ما D ای می خواهیم که اگر اندازه گیری را بر روی $\tilde{\varphi}$ انجام دهیم، برای مثال 99 بار از 100 بار به ما همان نتیجه ای را بدهد که اندازه گیری بر روی φ می دهد پس یعنی: $\int d\varphi \langle \varphi | \tilde{\varphi} | \varphi \rangle > 1 - \epsilon$

دومین آزمایش: (شکل 5.5 ب) به جای اینکه در نهایت مجبور به گرفتن میانگین بر روی تمام حالت ها باشیم، یک حالت ماکسیمالی میکس⁶² از M و یک سیستم مرجع به نام N که $N \cong M$ را آماده می کنیم:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_M}} \sum_{j=1}^{d_m} |j\rangle_m |j\rangle_m \quad (5.47)$$

و یکی از آن ها را به داخل سیاه چاله می اندازیم و مانند اولین حالت اول انتظار داریم: $\langle \varphi | \tilde{\varphi} | \varphi \rangle > 1 - \epsilon$ درست بودن حالت دوم به درست بودن حالت اول منجر می شود. اما چگونه می توانیم بگوییم که حالت دوم در اصل درست است؟

⁶². maximally mixed



شکل 5.5: الف مربوط به آزمایش اول و ب مربوط به آزمایش دوم است

در نظر بگیرید یک عملگر چگالی ρ_x و دو حالت $|\alpha\rangle_{xy}$ و $|\beta\rangle_{xy}$ به صورتی که:

$$\begin{aligned} \rho_x &= \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| ; \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \\ |\alpha\rangle_{xy} &= \sum_i \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle |f_i\rangle ; (\langle f_i | f_j \rangle) = \delta_{ij} \\ |\beta\rangle_{xy} &= \sum_i \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle |g_i\rangle ; (\langle g_i | g_j \rangle) = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.48)$$

که در آنها $\alpha_x = \beta_x = \rho_x$

به وضوح یک U وجود دارد که بر روی α عمل میکند و آن را به β می برد یعنی در رابطه ی $(I \otimes U)|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ صدق می کند.

حال ما ادعا می کنیم که با داشتن $|\alpha\rangle_{xy}$ و $|\beta\rangle_{xy}$ که در رابطه ی $\alpha_x = \beta_x = \rho_x$ صدق می کند، این U وجود خواهد داشت. برای اثبات آن کافی است نشان دهیم که α و β می تواند در رابطه ی (۵.۴۸) صدق کند. (در ادامه خواهیم دید که D که برای خواندن کد آن را گذاشتیم، همین U خواهد بود).

با استفاده از ⁶³SVD ما می توانیم A را به فرم دو مانریس یکانی V و W و یک ماتریس قطری D بنویسیم:

$$A = [a_{ij}] \text{ و } A = VDW \quad (۵.۴۹)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\alpha = \sum_{i,j,k} V_{ji} D_{ii} W_{ik} |j\rangle_x |k\rangle_y = \sum_i D_{ii} |e_i\rangle_x |f_i\rangle_y \quad (۵.۵۰)$$

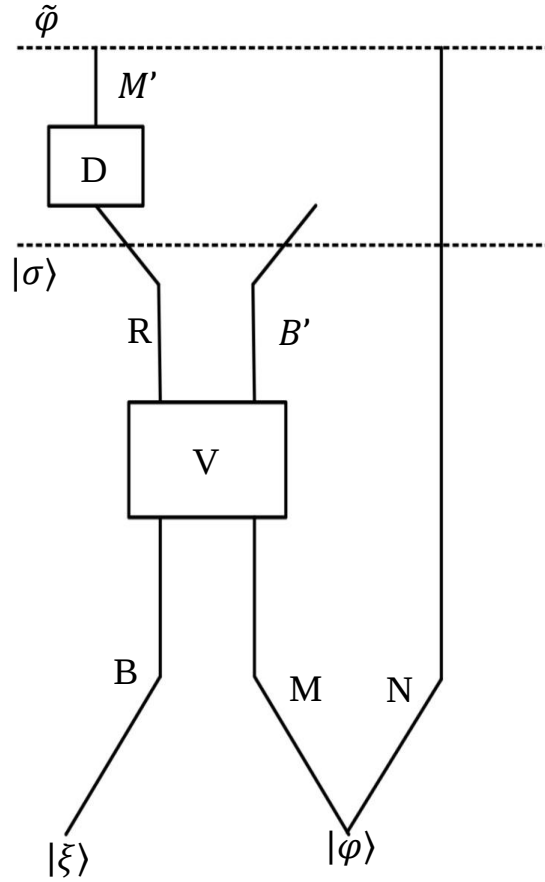
ما توانستیم α و به همین ترتیب β را به فرم رابطه ی (۵.۴۸) بنویسیم پس نتیجه می گیریم که ماتریس U میتواند وجود داشته باشد. که این باعث می شود که ویژه مقدار های مثبت α و β برابر باشند پس در نتیجه آنروپی های برابر داشته باشند.

$$Eig_{>0}(\alpha_x) = Eig_{>0}(\alpha_y) \rightarrow S_\alpha(\alpha_x) = S_\alpha(\alpha_y) \quad (۵.۵۱)$$

اکنون به یک مثال مهم میپردازیم (شکل 5.6): فرض کنید V پس از تبخیر سیاه چاله، تمام برهم کنش بین مرجع (N) و سیاه چاله بعد از تبخیر (B') را از بین می برد که این در اصل همان قضیه ی عدم شبیه سازی است. به زبان ریاضی اگر در مکان نقطه چین در شکل 5.6 حالت خالص $|\sigma\rangle$ را داشته باشیم میتوانیم بگوییم ($\sigma_N = \Phi_N$) زیرا هیچ عملی بر روی σ_N انجام نشده است پس برابر همان مقدار اولیه است یعنی Φ_N

$$\sigma_{B'N} = \sigma_{B'} \otimes \sigma_N = \sigma_{B'} \otimes \Phi_N \quad (۵.۵۲)$$

⁶³. singular value decomposition



شکل 5.6: V تمام برهم کنش B' و N را از بین میبرد.

فرض میکنیم سیستم تابش R را (که با M' ایزومورفسیم هست) را میتوانیم به صورت $R = M' \otimes O$ بنویسیم. حال $|\sigma\rangle_{M'OB'N}$ را با حالت فرضی $|\phi\rangle_{M'N} \otimes |\mathcal{L}\rangle_{OB'}$ مقایسه میکنیم که در آن $\mathcal{L}_{B'} = \sigma_{B'}$. علت این کار این است که با تریس گرفتن بر روی M' و O به دست می آوریم:

$$\sigma_{B'N} = \alpha_{B'N} \quad (5.53)$$

با برابر بودن این دو مقدار میتوانیم بیان کنیم که طبق فرضی که کرده ایم، یک ماتریس یکانی وجود دارد ($U_{M'O}$) که بر روی آن چیزی که باقی مانده است که همان تابش هست عمل می کنند به گونه ای که:

$$I_{B'N} \otimes U_{M'O} |\sigma\rangle = |\phi\rangle_{M'N} \otimes |\mathcal{L}\rangle_{OB'} \quad (5.54)$$

می بینم که دو سیستم M' و N ماکسیمالی درهم تنیده هستند که دقیقاً همان چیزی است که ما می خواهیم پس ماتریس چگالی D برابر است با:

$$D(\rho) = \text{tr}_O U_{M'O} \rho U_{M'O}^\dagger \quad (5.55)$$

پس شرط لازم و کافی برای وجود داشتن D این است که

$$\sigma_{B'N} = \sigma_{B'} \otimes \Phi_N \quad (5.56)$$

(5.56) ممکن است دقیقاً برابر نباشد و به صورت تقریبی برقرار باشد پس برای ادامه ی کار ابزاری را معرفی می کنیم که توسط آن می توانیم میزان تفاوت بین دو سیستم را اندازه گیری کنیم به صورتی که:

$$T(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_1; \quad \|x\|_1 = \text{tr} \sqrt{xx^\dagger} \quad (5.57)$$

اگر تفاوت بین دو حالت $\sigma_{B'N}$ و $\sigma_{B'} \otimes \Phi_N$ کم باشد، یا به عبارتی $T(\sigma_{B'N}, \sigma_{B'} \otimes \Phi_N) < \epsilon$ یک D وجود دارد که به ازای آن میتوانیم داشته باشیم $\langle \phi | \tilde{\phi} | \phi \rangle \geq 1 - \epsilon$.

اکنون به مفهومی به نام اطلاعات متقابل⁶⁴ نگاه میکنیم که به صورت زیر تعریف میشود:

$$I(A; B)_\rho = S(A)_\rho + S(B)_\rho - S(A, B)_\rho \quad (5.58)$$

حال چند ویژگی آن را بررسی میکنیم:

$$I(A; B) \geq 0 \quad (1) \text{ و در صورتی مساوی صفر هست که } \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$$

$$I(A; B) \leq 2 \log d_A \quad (2) \text{ زیرا اگر یک سیستمی ماکسیمالی در هم تنیده باشد، یعنی } |\phi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle_A |j\rangle_B \text{، آنگاه خواهیم داشت:}$$

$$I(A; B) = \log d_A + \log d_A - 0 = 2 \log d_A$$

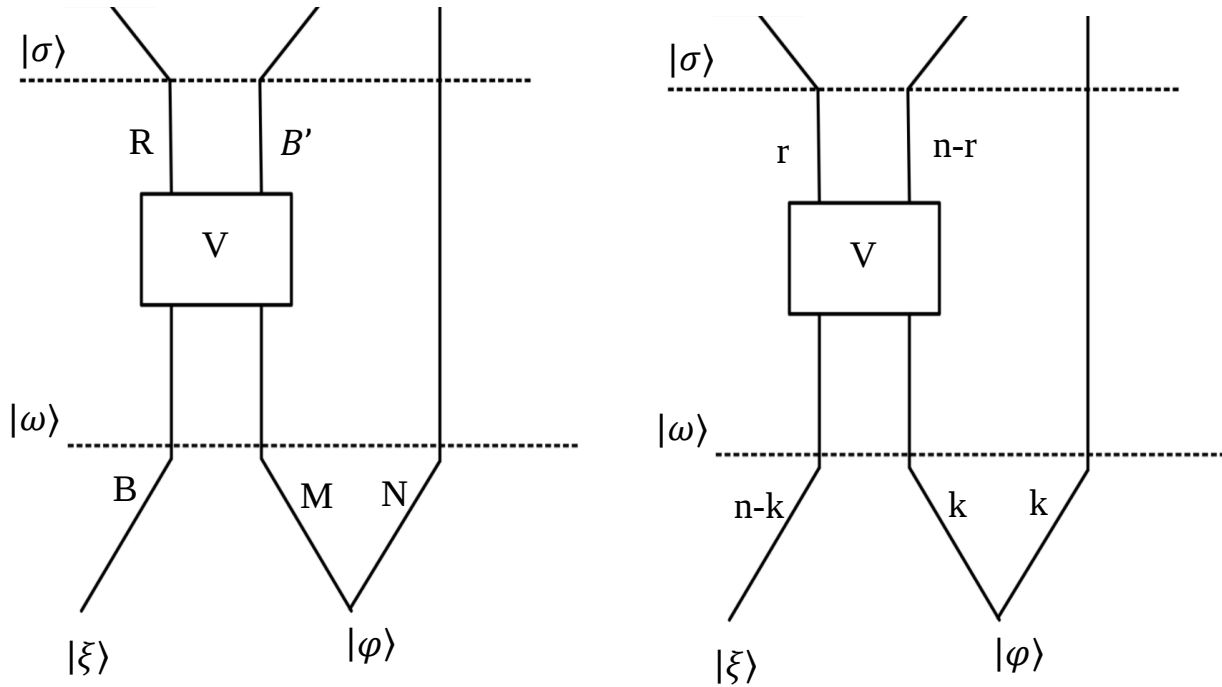
زیرا سیستم (A,B) خالص هست و در نتیجه ی آن آنروپی آن برابر صفر است. $2 \log d_A$ بیشترین مقداری است که اطلاعات متقابل می تواند داشته باشد که برای حالت ماکسیمالی میکس هست.

$$I(A; BC)_\rho \geq I(A; B)_\rho \quad (3) \text{ یعنی اگر مقداری از سیستم را حذف کنیم، اطلاعات متقابل آن نیز کم میشود}$$

$$I(A; BC)_\rho \leq I(A; B)_\rho + 2 \log d_C \quad (4) \text{ که این به این معناست که اگر با دو سیستم A و B شروع کنیم و سپس C را اضافه کنیم، باید یک حدی برای میزان انتقال اطلاعات توسط C وجود داشته باشد.}$$

⁶⁴. mutual information

حال برمی گردیم به ادامه ی مثال (شکل 5.7)



شکل 5.7: تصویر ب تعداد کیوبیت های تصویر الف را نمایش میدهد

حال به دنبال پیدا کردن اطلاعات متقابل بین N و M هستیم. اما می دانیم که B یک مجموعه ی خالص هست و این به این معناست که ویژه مقدار های BM برابر است با ویژه مقدار های M و از طرفی اطلاعات متقابل، تابعی از آنتروپی است و آنتروپی تابعی از ویژه مقدار هاست پس در نهایت میتوانیم B را به M اضافه کنیم:

$$I(N; M)_{\omega} = I(N; BM)_{\omega} \quad (5.59)$$

از طرفی می توانیم بنویسیم: $I(N; BM)_{\omega} = I(N; RB')_{\sigma}$ زیرا V یکانی هست و آنتروپی ها را تغییر نمی دهد.

و در نهایت با استفاده از ویژگی چهارم:

$$\begin{aligned} I(N; M)_{\omega} &= I(N; BM)_{\omega} = I(N; RB')_{\sigma} \leq I(N; B')_{\sigma} + 2 \log d_R \\ &\leq \text{small} + 2 \log d_R \end{aligned} \quad (5.60)$$

با فرض اینکه میتوانیم اطلاعات را دیکود⁶⁵ کنیم یعنی $\sigma_{B'N} \cong \sigma_{B'} \otimes \Phi_N$ مقدار کوچکی خواهد داشت. حال $I(N; M)_\omega = 2 \log d_m = 4k$ و $2 \log d_R = 4r$ خواهیم داشت:

$$k < r \quad (5.61)$$

پس برای دیکود کردن اطلاعات، باید حداقل مقدار تابشی که جمع آوری می کنیم برابر با پیام باشد. ما دنبال راهی هستیم که بتوانیم این مقدار را با مقداری که پیچ پیش بینی کرده بود نزدیک کنیم. برای این کار ما باید ثابت کنیم:

$$\int \|\sigma_{B'N} - \mathcal{L}_{B'} \otimes \Phi_N\|^2 dV \leq \frac{d_N d_{BM}}{d_R^2} \text{tr}[(\omega_{BMN})^2]; \mathcal{L}_{B'} \propto I_{B'} \quad (5.62)$$

علت این کار آن است که با نگاه به مثالی که داشتیم، می بینیم که ω خالص است، پس معادله ی (5.62) تبدیل می شود به:

$$\int \|\sigma_{B'N} - \mathcal{L}_{B'} \otimes \Phi_N\|^2 dV \leq \frac{d_N d_{BM}}{d_R^2} \text{tr}[(\omega_{BMN})^2] = \frac{2^k 2^n}{2^{2r}} 1 = 2^{n+k-2r} \quad (5.63)$$

و این مقدار زمانی کوچک می شود که $r > \frac{n+k}{2}$ که در اصل همان ایده ی پیچ است که زمانی که از این مقدار می گذریم نه تنها اطلاعات شروع به آن می کنند که به بیرون نشر پیدا کنند، بلکه اطلاعاتی بیرون می آید که ما آن را نیاز داریم.

حال ابزار جدیدی به نام آنتروپی رنی⁶⁶ را معرفی میکنیم:

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{tr} \rho^\alpha \quad (5.64)$$

که برای α های مختلف داریم:

$$S_0(\rho) = \log \text{rank } \rho \quad (5.65)$$

$$S_1(\rho) = s(\rho) \text{ von Neuman Entropy} \quad (5.66)$$

⁶⁵. decode

⁶⁶. Renyi Entropy

حال سعی می کنیم معادله ی (۵.۶۲) را بر حسب آنتروپی ها بنویسیم:

$$d_N = 2^{S_0(N)_\omega} \quad (۵.۶۸)$$

$$d_{BM} \sim 2^{S_0(BM)_\omega} \quad (۵.۶۹)$$

$$tr[(\omega_{BMN})^2] = 2^{-S_2(BMN)} \quad (۵.۷۰)$$

$$\frac{1}{d_R^2} = 2^{-2r} \quad (۵.۷۱)$$

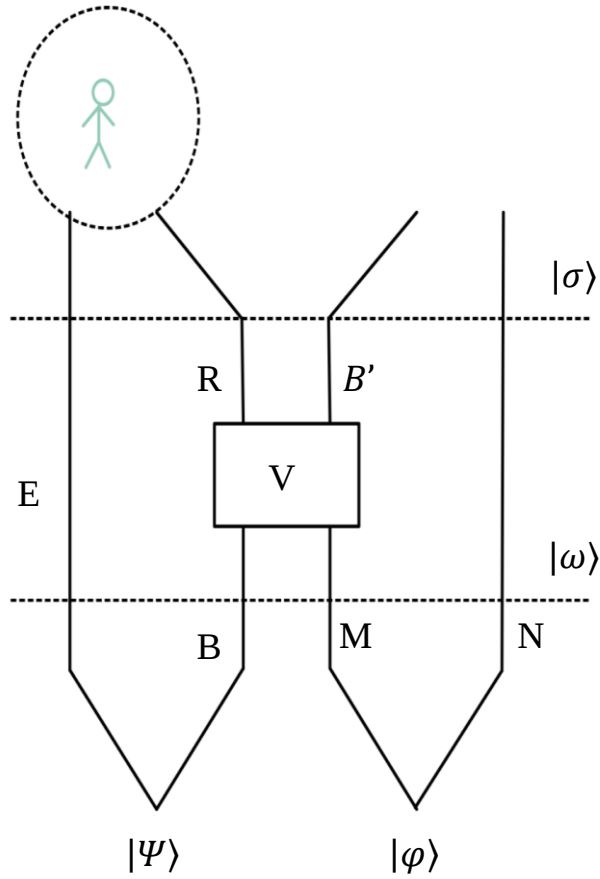
با قرار دادن این مقادیر در معادله ی به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} & \int \| \sigma_{B'N} - \mathcal{L}_{B'} \otimes \Phi_N \|^2 dV \\ & \leq 2^{S_0(N)_\omega} \times 2^{S_0(BM)_\omega} \times 2^{-S_2(BMN)} \times 2^{-2r} \sim 2^{I(N;BM)-2r} \end{aligned} \quad (۵.۷۲)$$

این معادله بیان می کند که زمانی که اطلاعات را داخل سیاه چاله می اندازید، اتفاقی که می افتد آن است که بر هم کنش بین N و BM کاهش پیدا می کند و اگر به اندازه ی کافی تابش وجود داشته باشد، بر هم کنش آن ها صفر میشود. برای این که از حالت تقریبی به حالت برابر برسیم، در عبارت $S_0(N)_\omega$ ، Φ ماکسیمالی میکس هست و $tr \Phi_M = N$ و در نتیجه بعد برابر رنک هست پس این مقدار تقریبی نیست. اما در $S_0(BM)_\omega$ ، M ماکسیمالی میکس هست پس $d_m = 2^k$ اما B یک حالت خالص هست و رنک آن یک هست پس رنک کل برابر است با 2^k . در نتیجه:

$$S_0(N)_\omega = \log rank [|\xi_0\rangle\langle\xi_0| \otimes \Phi_N] = k \quad (۵.۷۳)$$

حال چگونه می توانیم رنک را افزایش دهیم. برای این کار ما یک آزمایش جدید نیاز داریم که در آن حالت اولیه سیاه چاله باید میکس باشد. برای این کار ما باید از یک سیاه چاله ی قدیمی استفاده کنیم که تبخیر شده است و با تابش خودش در هم تنیده است. پس $|\xi_0\rangle$ را به حالت $|\Psi\rangle$ که همانند $|\varphi\rangle$ ماکسیمالی درهم تنیده هست تبدیل می کنیم مطابق شکل 5.8. برای دیکود کردن اطلاعات باید داشته باشیم $\sigma_{B'N} \cong \sigma_{B'} \otimes \Phi_N$ ، این به این معناست که باب باید به تابش اولیه (E) و تابش نهایی (R) دسترس داشته باشد.



شکل 5.8: سیاه چاله ی قدیمی که حالت اولیه ی آن میکس است.

برای یک سیاه چاله ی قدیمی خواهیم داشت: (در عبارت $tr [(\omega_{BMN})^2]$ MN خالص است و نقشی ندارد بنابراین فقط B موثر است)

$$\int \| \sigma_{B'N} - \mathcal{L}_{B'} \otimes \phi_N \|^2 dV \leq \frac{d_N d_{BM}}{d_R^2} tr [(\omega_{BMN})^2] \quad (5.74)$$

$$= \frac{2^k 2^n}{2^{2r}} 2^{-(n-k)} = 2^{2(k-r)}$$

پس زمانی دیکود کردن ممکن هست که $r < k$.

با فرض کوچک بودن پیام یعنی $k = 1$ ، کوانتای هاوکینگ از مرتبه ی یک خواهد بود. می دانیم که به ازای هر شعاع شوارتزشیلد ما کوانتای هاوکینگ از مرتبه ی یک خواهیم داشت. پس $t_{info} \sim O(r_s)$ از طرفی طبق معادله

ی (۵.۴۶) داشتیم که اگر $t_{info} < r_s \log r_s$ باب می تواند داخل سیاه چاله برود و نتایجش را با آلیس مقایسه کند باعث نقض اصل مکملیت میشود.

۵.۲.۴ اصل مکملیت⁶⁷

مکمل بودن سیاه چاله یک ایده بسیار جذاب است که در اوایل دهه ۱۹۹۰ مطرح شد، بر اساس این پیشنهاد یک نظریه فیزیکی نیازی به توصیف ناظری ندارد که بتواند پدیده ها را در داخل و خارج یک سیاهچاله اندازه گیری کند، زیرا چنین ناظری نمی تواند وجود داشته باشد [۲۸].

این نظریه بیان می کند جسمی که در سیاه چاله سقوط می کند، به افق کشیده⁶⁸ که به اندازه ی یک طول پلانک بالاتر از افق شوارتزیلد است برخورد می کند، که آن را جذب و به عنوان تابش هاوکینگ ساطع می کند. مکمل بودن سیاهچاله به این معناست که جسم در واقع هرگز در سیاه چاله نمی افتد و از آن عبور می کند. به عبارت دیگر، پس از انداختن اطلاعات به درون یک سیاهچاله، یک ناظر در حال سقوط به داخل سیاهچاله، آن را در داخل می بیند در حالی که یک ناظر خارجی همان مقدار را در بیرون می بیند اما هیچکس نمی تواند هر دو را ببیند. [۲۹] کلمه مکمل به این دلیل استفاده می شود که درست مانند مفهوم مکملیت بور (که خصوصیات موجی و ذره ای نور را نمی توان به طور همزمان اندازه گیری کرد)، اندازه گیری اطلاعات درون سیاهچاله مانع از اندازه گیری آن در خارج و بالعکس است.

فرض های استفاده شده در مکمل سیاه چاله عبارتند از: [۲۹]

- یک ناظر خارجی، شکل گیری و تبخیر یک سیاهچاله را یکانی توصیف می کند، یعنی در اصل یک ماتریس یکانی S وجود دارد که کل فرایند را توصیف می کند.

- خارج از افق کشیده سیاهچاله ($R_s + l_p >$ در فواصل) نظریه میدان نیمه کلاسیک برقرار است.

- زیرفضای حالات دارای بعد e^S است، که در آن S آنترپی بکنشتاین است: $S = \frac{A}{4}$.

- برای یک ناظر در حال سقوط به داخل سیاهچاله، افق مانند هر ناحیه دیگر از فضا -زمان به نظر می رسد - به عبارت دیگر، اصل هم ارزی صادق است.

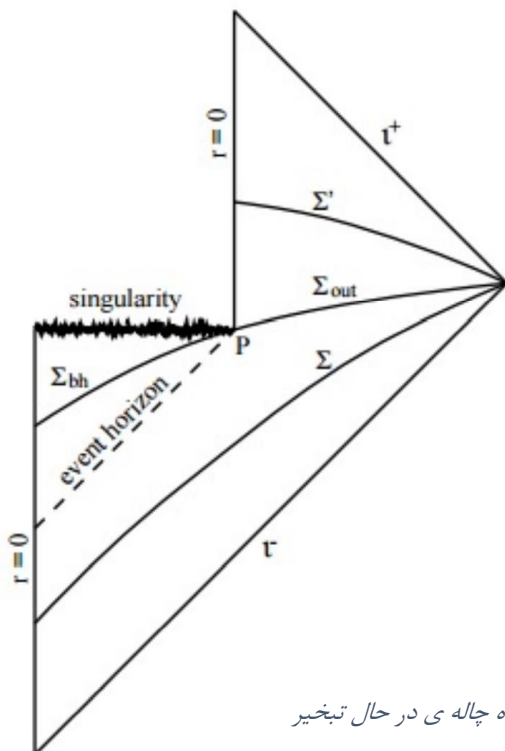
نمودار پرنور برای یک سیاهچاله در حال تبخیر در شکل ۵.۹ نشان داده شده است. با فرض اینکه فضا -زمانی که سیاهچاله در آن قرار دارد در سراسر جهان هذلولی است، می توانیم آن را با استفاده از یک سری سطوح کوشی

⁶⁷. complementarity

⁶⁸. stretched horizon

پوشش دهیم. یک سطح کوشی برای یک سیاهچاله در حال تبخیر تعریف می کنیم که بخشی از آن در داخل و بخش دیگری از آن در خارج از سیاه چاله قرار دارد به بیان ریاضی طبق شکل 5.4 به دو قسمت Σ_{out} و Σ_{bh} تقسیم میشود که در آن $\Sigma_p = \Sigma_{bh} \cup \Sigma_{out}$. سطوح کوشی انتخاب شده باید در شرایطی که در بخش 5.1 بیان کردیم، صدق کند. آخرین شرط بیان می کرد که حالت های تعریف شده بر روی یک برش میتواند به حالت ها در برش دیگر تبدیل شود، بنابراین یک حالت $|\psi(\Sigma)\rangle$ در Σ می تواند به آرامی به $|\psi(\Sigma_p)\rangle$ در Σ_p تبدیل شود که سپس می تواند به $|\psi(\Sigma')\rangle$ تعریف شده در Σ' تبدیل بشود (Σ' فضا را پس از تبخیر کامل سیاهچاله است). اولین فرض مکملیت سیاهچاله می گوید اگر ماتریس یکانی S روی $|\psi(\Sigma)\rangle$ عمل کند ماتریس $|\psi(\Sigma')\rangle$ را به ما می دهد، همچنین $|\psi(\Sigma')\rangle$ باید یک حالت خالص باشد چون ما فرض کرده ایم که تابش هاوکینگ پس از تبخیر کامل سیاهچاله خالص است. علاوه بر این فرض بر این است که $|\psi(\Sigma')\rangle$ حاصل تکامل $|\xi(\Sigma_{out})\rangle$ که بر روی فضای Σ_{out} تعریف شده است است. این بدان معناست که $|\psi(\Sigma_p)\rangle = |\Pi(\Sigma_{bh})\rangle \otimes |\xi(\Sigma_{out})\rangle$ که در آن $\Pi(\Sigma_{bh})$ یک حالت تعریف شده بر روی Σ_{bh} است. [۲۸]

این حاصل ضرب حالت های تعریف شده در Σ_p و $|\psi(\Sigma_p)\rangle$ ، حاصل تکامل خطی $|\psi(\Sigma)\rangle$ است با این حال خود $|\xi(\Sigma_{out})\rangle$ هم حاصل تکامل خطی $|\psi(\Sigma)\rangle$ است بنابراین به نظر میرسد که $|\Pi(\Sigma_{bh})\rangle$ مستقل از از حالت اولیه ی قبل از تشکیل سیاه چاله یعنی $|\psi(\Sigma)\rangle$ به بیان دیگر در حال سفید اطلاعاتی است که داخل سیاهچاله می



شکل 5.9: نمودار پنروز برای یک سیاه چاله ی در حال تبخیر

افتد. اصل مکملیت این اثر را از بین می برد با بیان اینکه فرض وجود داشتن حالت Σ_p که به طور همزمان داخل و خارج سیاهچاله را توصیف

همانطور که قبلاً دیدیم، اگر فیزیک نیمه کلاسیک در برش های فضا-زمان سیاهچاله معتبر باشد، جفت هاوکینگ در خلأ تولید میشود نه در یک افق کشیده، بنابراین، مکمل بودن نیازمند آن است که فیزیک جدید غیر محلی⁶⁹ در افق شوارتزیلد برقرار باشد. مقاله ای که به اختصار نام نویسندگان آن است AMPS معروف است، بیان می کند که تئوری مکمل بودن منجر به تناقض می شود و با فرض بقای اطلاعات و درست بودن نظریه میدان موثر، باید یک "دیوار آتش"⁷⁰ در افق، منطقه ای از تابش چگالی پلانک که هرگونه ماده ای را که وارد آن می شود نابود می کند، وجود داشته باشد اما ایده ی فایروال، اصل هم ارزی را نقض می کند. [۱۸]

بحث AMPS را می توان به صورت زیر قرار داد. با فرض درست بودن اصل مکملیت، یک ناظر خارجی دور (A) تابش هاوکینگ ساطع شده از یک افق کشیده را دریافت می کند، در حالی که یک ناظر (B) با افتادن در سیاه چاله هیچ چیز غیرعادی را تجربه نمی کند. برای ناظر A، تابش اولیه هاوکینگ بسیار دورتر از سیاه چاله است در حالی که تابشی که تازه خارج شده است، خارج از افق کشیده شده است. فرض میکنیم که برای ناظران A و B، هیچ تناقضی بین اندازه گیری تابش هاوکینگ اولیه و تابشی که تازه ساطع شده است وجود ندارد. ناظر B در افق خلاء را اندازه گیری می کند. از طرفی طبق بحث در انتهای بخش ۵.۱، آنروپی درهم تنیدگی سیاه چاله و تابش هاوکینگ باید با ایجاد هر جفت جدید هاوکینگ به طور پیوسته افزایش پیدا کند. پس به نظر می رسد با فرض یکسان بودن اندازه گیری، آنروپی درهم تنیدگی بین سیاه چاله و تابش خروجی برای ناظر A به طور پیوسته افزایش می یابد که یک تناقض است چون بنابر نظریه ی پیچ، ناظر A باید آنروپی درهم تنیدگی را پس از تبخیر نصف سیاه چاله تبخیر شده است در حال کاهش اندازه گیری کند. [۲۹]، [۳۰]

مکمل بودن مستلزم غیر محلی بودن در محدوده ی افق شوارتزیلد است، اما با در نظر گرفتن محلی بودن فیزیک خارج از افق کشیده شده، استدلال AMPS نشان می دهد که این محدودیت منجر به یک دیوار آتش به ظاهر غیر فیزیکی می شود، بنابراین ایده اولیه مکمل بودن به نظر نمی رسد مکانیسم ثابتی را ارائه دهد که به موجب آن اطلاعات در تبخیر سیاهچاله حفظ می شود. [۱۸]

کارهای زیادی برای جایگزین کردن فایروال انجام شده است، از جمله یک ایده بسیار جذاب معروف به پیشنهاد $ER = EPR$. $ER = EPR$ ، نام برآمده از معادل سازی احتمالی درهم تنیدگی (پارادوکس انیشتین-پودولسکی-روزن) و کرم چاله ها (که به پل های اینشتین روزن نیز معروف است) و بیان میکند که ذرات خروجی هاوکینگ

⁶⁹. non local

⁷⁰. firewall

از طریق کرم چاله ها به جفت درون سیاه چاله متصل میشوند. راه دیگر بیان پارادوکس AMPS این است که اگر بخواهیم اطلاعات را حفظ کنیم، یک کوانتای در حال خروج هاوکینگ باید با تمام تابشهای تابیده شده قبلی هاوکینگ درهم تنیده باشد، اما کوانتای خروجی نیز همانطور که دیدیم با کوانتای داخل سیاه چاله هم در هم تنیده است. این درهم تنیدگی هایی برای کوانتای خروجی ماکسیمالی در هم تنیده است و با اندازه گیری فقط بر روی کوانتای خروجی هیچ اطلاعاتی در مورد حالت درهم تنیده کامل ارائه نمی دهد. نویسندگان AMPS برای حفظ بقای اطلاعات، پیشنهاد کردند که درهم تنیدگی بین جفت هاوکینگ باید شکسته شود، در نتیجه مقدار زیادی انرژی در منطقه افق ایجاد می شود و یک دیوار آتش ایجاد می کند. پیشنهاد $ER = EPR$ می گوید که جفت های هاوکینگ با کرم چاله ها مرتبط هستند و بنابراین سیستم های مستقلی نیستند و به آنها اجازه می دهند تا با یکدیگر تعامل داشته باشند. $ER = EPR$ وجود فایروال را رد نمی کند، اما بیان میکند اگر بتوان نشان داد که تنها در صورتی فایروال وجود خواهد داشت که پل انیشتین-روزن که سیاهچاله را به تابش خود متصل می کند در نزدیکی سیاهچاله صاف باشد. [۳۱] و [۳۰]

فصل ششم: نتیجه گیری

در این پروژه، پارادوکس اطلاعات سیاه چاله را مطالعه کردیم و تعدادی از تلاش های انجام شده تا کنون برای حل کردن آن را بررسی کردیم. ما با نگاهی کوتاه به تاریخچه سیاهچاله ها و معرفی ابزارهای ریاضی برای مطالعه ی آن ها شروع کردیم و در ادامه به شباهت میان قوانین ترمودینامیک کلاسیک و سیاه چاله ها پرداختیم. در فصل بعد با استفاده از اثر اونراه، تابش هاوکینگ را به دست آوردیم و علت استفاده از آن نشان دادن وابستگی مفاهیم ذرات و خلاء به ناظر بود. در ادامه اطلاعات و رابطه آن با آنتروپی معرفی شد. در قسمت آخر، به این پرداختیم که علت اصلی پارادوکس، خلاء بدون اطلاعات در افق رویداد است که توسط نسبیت عام پیش بینی شده است؛ با تبخیر سیاهچاله ها، این خلاء کشیده می شود و جفت هاوکینگ را تولید می کند. اولین راه حلی که ارائه دادیم، ایده ی باقی مانده است؛ یک ایده نسبتاً قدیمی که نشان می داد تبخیر سیاه چاله زمانی که به اندازه پلانک میرسد متوقف می شود. در ادامه و مفهوم میانگین آنتروپی پیچ را از لحاظ ریاضی اثبات کردیم و نظریه ی او را که بیان میکرد بعد از زمان پیچ، اطلاعات شروع به بیرون آمدن از سیاه چاله میکنند، بسط دادیم. در نهایت به ایده ی مکملیت و مقاله جالب درهم تنیدگی و کرم چاله ها پرداختیم. راه حل های ارائه شده هر کدام دارای تناقضاتی بودند که ما در مورد آنها بحث کردیم: تبه گنی بی نهایت در نظریه ی باقی مانده، از بین رفتن اطلاعات در نظریه ی پیچ، وجود داشتن فایروال در افق سیاه چاله در نظریه ی مکملیت که با اصل هم ارزی نسبیت عام در تضاد است.

به نظر می رسد که تحقیقات در این زمینه همچنان فعال است و حل پارادوکس، صرف نظر از ایده یا چارچوب خاصی که پاسخ می دهد، گامی مهم در درک ما از جهان خواهد بود.

- [1] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2019).
- [2] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [3] R. C. Henry, *Kretschmann Scalar for a Kerr-Newman Black Hole*, *Astrophys. J.* **535**, 350 (2000).
- [4] Dowker, *Black Holes, Imperial College London, MSc Quantum Fields and Fundamental Forces, Lecture Notes*.
- [5] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit : The Mathematics of Black-Hole Mechanics* (New York: Cambridge University Press, 2004).
- [6] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur* (Oxford University Press, n.d.).
- [7] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago: University of Chicago Press, 1994).
- [8] D. S. Lemons, *A Student's Guide to Entropy* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [9] M. M. Wilde, *Quantum Information Theory* (Cambridge University Press, 2013).
- [10] J. L. F. Barbon and J. M. Magan, *Chaotic Fast Scrambling At Black Holes*, *Phys. Rev. D* **84**, 106012 (2011).
- [11] S. Blundell and K. M. Blundell, *Concepts in Thermal Physics*, 2nd ed (Oxford University Press, Oxford ; New York, 2010).
- [12] F. A. Bais and J. D. Farmer, *The Physics of Information*, (2007).
- [13] T. Nishioka, S. Ryu, and T. Takayanagi, *Holographic Entanglement Entropy: An Overview*, *J. Phys. Math. Theor.* **42**, 504008 (2009).
- [14] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [15] L. Susskind, *The Black Hole War: My Battle with Stephen Hawking to Make the World Safe for Quantum Mechanics*, 1st ed (Little, Brown, New York, 2008).
- [16] S. D. Mathur, *What Exactly Is the Information Paradox?*, *ArXiv08032030 Hep-Th* **769**, 3 (2009).
- [17] D. C. Robinson and L. Wc, *Four Decades of Black Hole Uniqueness Theorems*, 36 (n.d.).

- [18] R. B. Mann, *Black Holes: Thermodynamics, Information, and Firewalls* (Springer International Publishing, 2015).
- [19] V. Frolov and I. Novikov, *Dynamical Origin of the Entropy of a Black Hole*, Phys. Rev. D **48**, 4545 (1993).
- [20] G. 't Hooft, *On the Quantum Structure of a Black Hole*, Nucl. Phys. B **256**, 727 (1985).
- [21] S. D. Mathur, *The Information Paradox: A Pedagogical Introduction*, Class. Quantum Gravity **26**, 224001 (2009).
- [22] P. Chen, Y. C. Ong, and D. Yeom, *Black Hole Remnants and the Information Loss Paradox*, Phys. Rep. **603**, 1 (2015).
- [23] D. N. Page, *Average Entropy of a Subsystem*, (1993).
- [24] D. N. Page, *Information in Black Hole Radiation*, (1993).
- [25] International Centre for Theoretical Sciences, *Patrick Hayden - Quantum Information and Black Holes 1* (n.d.).
- [26] International Centre for Theoretical Sciences, *Patrick Hayden - Quantum Information and Black Holes 2* (n.d.).
- [27] International Centre for Theoretical Sciences, *Patrick Hayden - Quantum Information and Black Holes 3* (n.d.).
- [28] L. Susskind, L. Thorlacius, and J. Uglum, *The Stretched Horizon and Black Hole Complementarity*, Phys. Rev. D **48**, 3743 (1993).
- [29] *Polchinski.Pdf*. Polchinski, Black Holes Information, Entanglement, Complementarity, and Firewalls, qft.physics.harvard.edu/simons
- [30] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, and J. Sully, *Black Holes: Complementarity or Firewalls?*, J. High Energy Phys. **2013**, 62 (2013).
- [31] J. Maldacena and L. Susskind, *Cool Horizons for Entangled Black Holes*, Fortschritte Phys. **61**, 781 (2013).