



مروری بر ترمودینامیک سیاه چاله

نویسنده:

شعرا جعفری تبار

سال تحصیلی:

1399-1400

مقدمه ریاضی

ما ابتدا با معرفی چندین مفهوم اساسی که برای به دست آوردن چهار قانون ترمودینامیک سیاهچاله مفید خواهد بود، شروع می کنیم. همانند نسبیت عام از منیفولد شبه ریمانی (M, g) کار خواهیم کرد، که M یک مانیفولد چهار بعدی است و g نشان دهنده تانسور متریک متقارن $(-1, 1, 1, 1)$. مشتق هم وردای بردار $v \in M$ برابر است با:

$$v^\lambda{}_{;\mu} = v^\lambda{}_{,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\nu \quad (1.1)$$

که کاما در آن نشان دهنده ی مشتق جزئی است. حروف یونانی نشان دهنده ی مجموعه ی $\{0, 1, 2, 3\}$ است و ما از نمادگذاری انیشتین $v_\mu v^\mu = \sum_{\mu=0}^3 v_\mu v^\mu$ استفاده میکنیم که توسط نماد کریستوفل به صورت زیر توضیح داده میشود:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\kappa\mu,\nu} + g_{\nu\kappa,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa}) \quad (1.2)$$

تانسور ریمان $R^\mu_{\nu\kappa\lambda}$ ، تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ و انحنای اسکالر R را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$R^\mu_{\nu\kappa\lambda} v_\mu = v_{\nu;\kappa\lambda} - v_{\nu;\lambda\kappa} \quad (1.3)$$

$$R^\mu_{\nu\kappa\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda,\kappa} - \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} \quad (1.4)$$

$$R^\mu_{\nu\mu\lambda} = R_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

$$R^\mu_{\mu} = R \quad (1.6)$$

1.1.1 میدان برداری کیلینگ

یکی از مهمترین ابزار ریاضی که ما با آنها کار خواهیم کرد بردارهای کیلینگ هستند. برای هر ایزومتري که یک فضا-زمان نشان می دهد، ما می توانیم مدارهایی را تعريف کنیم که در طول آنها متریک محلی تغییر نمی کند. بردارهای مماسی این مدارها به عنوان بردارهای کیلینگ شناخته می شوند و تمام بردارهای مربوط به یک ایزومتري یک میدان برداری کیلینگ را تشکیل می دهند. دیفرمورفیسم یک ایزومتري است اگر و فقط در صورتی که مشتق لی آن در همه جا در فضا زمان برابر با صفر باشد. از این طریق می توانیم مستقیماً یک معادله برای بردار کیلینگ ξ^μ به نام معادله کیلینگ آدامسون بدست آوریم:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\kappa} \xi^\kappa + g_{\kappa\nu} \xi_\nu{}^{;\kappa} = 0 \quad (1.7)$$

$$\xi^\mu{}_{;\nu} = -\xi^\nu{}_{;\mu} \quad (1.8)$$

با استفاده از معادله 1.8 و تعريف تانسور ریمان ممکن است دو معادله ی مهم دیگر بدست می آوریم

$$\xi_{\nu;[\kappa;\lambda]} = \frac{1}{2}(\xi_{\nu;\kappa\lambda} - \xi_{\nu;\lambda\kappa}) = \frac{1}{2}R_{\nu\kappa\lambda}^\mu \xi_\mu \quad (1.9)$$

$$\xi^{\mu;\nu}{}_\nu = -\xi^{\nu;\mu}{}_\nu = \xi^\nu{}_{;\nu}{}^\mu - \xi^{\nu;\mu}{}_\nu = -R_\kappa{}^\nu{}_\nu{}^\mu \xi^\kappa = R_\kappa{}^\mu \xi^\kappa = R^\mu{}_\kappa \xi^\kappa \quad (1.10)$$

ما عمده‌تاً در یک فضا-زمان ساکن متقارن محوری و تخت کار خواهیم کرد. یک مثال آن فضا-زمان کر-نوبمن است که شامل یک سیاهچاله ی در حال چرخش باردار است. ما همچنین می توانیم هر شکلی از انرژی را خارج از سیاهچاله اضافه کنیم به شرطی که توزیع آن متقارن محوری باشد و در زمان تغییر نکند. برای هر فضا-زمان یک میدان بردار منحصر به فرد کیلینگ ξ^μ وجود دارد که در نزدیکی بی نهایت زمانگونه و $\xi^\mu \xi_\mu = -1$. علاوه بر این، یک میدان کیلینگ چرخشی منحصر به فرد $\bar{\xi}^\mu$ که $\bar{\xi}^\mu \bar{\xi}_\mu = 1$ وجود دارد. هرگونه ترکیب خطی از بردارهای کیلینگ با ضرایب ثابت، یک بردار کیلینگ است. برای یک سیاهچاله کر-نوبمن با سرعت زاویه ای Ω_H در افق رویداد، یک میدان بردار [1]

$$l^\mu = \xi^\mu + \Omega_H \bar{\xi}^\mu \quad (1.11)$$

مماس بر مولد ژنودیسک صفر افق، هم یک بردار کیلینگ است. [1]

1.1.2 تانسوری انرژی ممنتوم و معادلات اینشتین

معادلات اینشتین در نسبیت عام نقش اساسی دارند. در اینجا معادله ای را که بیشتر به درد محاسبات خود میدانیم به دست می آوریم و برخی از محدودیت های ضروری را در سمت راست آنها، تانسور انرژی-ممنتوم ، اعمال می کنیم. از آنجا که ما به مقیاس های کیهان شناسی علاقه نداریم، از معادلات اینشتین با ثابت کیهان شناسی صفر استفاده می کنیم:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

با تریس گرفتن از معادله می توانیم آن را به شکلی بازنویسی کنیم که حاوی تریس تانسور انرژی-ممنتوم T به جای خمیدگی R است:

$$R^\nu_\nu - \frac{1}{2}Rg^\nu_\nu = 8\pi T^\nu_\nu \quad (1.13)$$

$$R = -8\pi T \quad (1.14)$$

با جایگزین کردن آن در معادله ی 1.13 به دست می آوریم:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (1.15)$$

تانسور حرکت موج انرژی اغلب باید در شرایطی صدق کند که نشان می دهد هر جواب معادله اینشتین دارای خواص فیزیکی معقول خاصی است. ما شرایط انرژی غالب را فرض می کنیم که بیان می کند برای هر میدان بردار زمان گونه ی ν^μ و هر بردار صفر یا زمانگونه ω^μ داریم $T_{\mu\nu}\nu^\mu\nu^\nu \geq 0$ و $T_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu$ یک بردار غیر فضاگونه است عبارت $T_{\mu\nu}\nu^\mu\nu^\nu$ را می توان به عنوان چگالی انرژی محلی تفسیر کرد که بنابراین باید غیرمنفی باشد. قیدهای $T_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu$ مانع از مشاهده انرژی برای حرکت سریعتر از نور می شود. اجازه دهید توجه داشته باشیم که این الزام به ویژه برای بردار تهی $A = \pi r^2$ همانطور که قبلاً تعریف کردیم ، وجود دارد.

1.1.3 متریک ها

$$d_s^2 = \left(-\frac{\Delta \Sigma}{A} + \frac{A}{\Sigma} w^2 \sin^2 \theta \right) dt^2 \pm 2 \frac{A}{\Sigma} \omega \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (1.16)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (1.17)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (1.18)$$

$$d = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \quad (1.19)$$

$$\omega = a \frac{2Mr - Q^2}{A} \quad (1.20)$$

$$a = \frac{J}{M} \quad (1.21)$$

M در اصل کل جرم فیزیکی موجود در فضا زمان است، Q کل بار الکتریکی و J مجموع حرکت زاویه ای است. این مختصات برای ما مناسب است زیرا بردارهای کیلینگ ξ^μ و $\tilde{\xi}^\mu$ در آنها به ترتیب به صورت دو بردار واحد $(1, 0, 0, 0)$ و $(0, 0, 0, 1)$ بیان میشود. به راحتی می توان دریافت که برای مقادیر بسیار زیاد r، مختصات بویر-لیندکیست به خوبی با مختصات شوارتزیلد تقریب زده شده است که خلا فضا- زمان متقارن کروی را توصیف می کند:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.22)$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

1.2 قانون دوم ترمودینامیک

پیشنهاد اولیه بکنشتاین درباره مفهوم آنتروپی سیاهچاله بر اساس دو فرض اصلی بود. یکی این فرض است که قانون دوم ترمودینامیک باید برای کل جهان معتبر باشد، حتی اگر شامل سیاهچاله ها باشد. مورد دوم افزایش ناحیه افق رویداد در هنگام جذب ماده توسط سیاهچاله است. برای یک سیاهچاله شوارتزیلد، منطقه افق A متناسب با جرم M آن است، یعنی $A = 16\pi M^2$. در مورد انواع دیگر سیاهچاله ها وضعیت پیچیده تر است. با این حال، برای کاهش، به عنوان مثال مساحت افق سیاه چاله کر، ذره ای از جرم m که در داخل آن سقوط می کند، باید دارای شتاب زاویه ای $J > m^2$ باشد. (جهت گیری آن باید در راستای اندازه حرکت زاویه ای سیاهچاله باشد).

دو سال قبل از اینکه بکنشتاین مقاله خود را بنویسد، هاوکینگ یک قضیه کلی را اثبات کرده بود مبنی بر اینکه برای یک سیاهچاله که به طور کامل با نسبیت عام توصیف شده است، مساحت افق رویداد آن هرگز کاهش نمی یابد. ما با استفاده از نتیجه ارائه شده توسط آدامسون این مسئله را به دست خواهیم آورد.

3.2.1 قضیه افزایش مساحت

رفتار یک ابرسطح تهی را که با η نشان داده شده است را مطالعه میکنیم. ما یک ژئودیسک تهی η با پارامتر λ و میدان بردار مماس تهی k^μ را انتخاب می کنیم.

ما بسط θ برای یک نقطه از مولد را تعریف می کنیم:

$$\theta = k^\mu_{;\mu} \quad (1.23)$$

می توان آن را به عنوان واگرایی فضایی دو ژئودزیک مجاور که توسط ناظری که در راستای یکی از آنها حرکت میکند اندازه گیری میکند، بررسی کرد. از آنجا که η بر مولد ژئودزیک تهی آن عمود است، θ همچنین تغییر محلی در اندازه یک واحد مساحت η را می دهد. برای توصیف کامل تکامل ژئودزیک به دو کمیت دیگر نیاز داریم. اولین مورد، یک تانسور برشی $\sigma_{\mu\nu}$ است که تمایل برخی از ژئودزیک ها را برای تغییر بیشتر از دیگران به مقدار λ را نشان می دهد. دومی یک تانسور پیچشی $\omega_{\mu\nu}$ است که چرخش واحد مساحت η را توصیف میکند. این تانسورها، مانند تانسورها در اجسام جامد، هر دو دارای تریس صفر هستند، زیرا تانسور برشی متقارن است و تانسور پیچشی غیر متقارن است. کلی ترین تحول محلی ژئودزیک ها را می توان با تانسور توصیف کرد. [2]

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} = k_{\mu;v} \quad (1.24)$$

که در آن $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu N_\nu + N_\mu k_\nu$ ، تصویر متریک بر روی ابر صفحه ی η است. N_μ بردار تهی است که به صورت $k_\mu N^\mu = -1$ نرمالیزه میشود. ما این کمیت را معرفی کردیم چون $g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$ در ابرسطح تهی درست کار نمیکند چون $k^\mu (g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) = k_\nu \neq 0$.

اگر بخواهیم رفتار $B_{\mu\nu}$ را در راستای ژئودیسک تعریف کنیم، میتوانیم از معادله ی ژئودیسک استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu,k} k^k &= k_{\mu;vk} k^k = k_{\mu;kv} k^k + R^\lambda_{\mu\nu k} k_\lambda k^k \\ &= (k_{\mu;k} k^k)_{;v} - k_{\mu;k} k^k_{;v} + R^\lambda_{\mu\nu k} k_\lambda k^k \\ &= -B_{\mu k} B^k_v + R^\lambda_{\mu\nu k} k_\lambda k^k \end{aligned} \quad (1.25)$$

در اینجا ما فقط از تعریف تانسور ریمانی و معادله ی ژئودیسک k^μ استفاده کرده ایم. با استفاده از معادله ی 1.24 و تریس گرفتن از این معادله و استفاده از ویژگی های تانسور برشی و پیچشی به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} B^\mu_{\mu;k} k^k &= -B_{\mu;k} B^{k\mu} + R^{\lambda\mu}_{\mu k} k_\lambda k^k \\ \theta_{;k} k^k &= \frac{-1}{2} \theta^2 - \sigma_{\mu k} \sigma^{k\mu} - \omega_{\mu k} \omega^{k\mu} - R_{\lambda k} k^\lambda k^k \\ \frac{d\theta}{d\lambda} &= -\frac{1}{2} \theta^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \end{aligned} \quad (1.26)$$

این معادله، به معادله ی Raychaudhuri شناخته میشود. با استفاده از معادله ی 1.15 و نرمالیزاسیون k^μ به دست می آوریم:

$$R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 8\pi \left(T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu - \frac{1}{2} T \right) \quad (1.27)$$

اگر شرایط انرژی برقرار باشد، سمت راست معادله 1.27 باید منفی باشد. از آنجا که تانسور برشی، فضایی است، عبارت $\sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ نیز منفی نیست. علاوه بر این، یک معادله تکاملی برای $\omega_{\mu\nu}$ وجود دارد که باعث میشود در معادله ی $\omega_{\mu\nu} = 0$ صدق کند، بنابراین داریم: [2]

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\lambda} &\leq -\frac{1}{2} \theta^2 \\ \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{(\theta')^2} &\leq - \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\lambda'^2} \\ \frac{1}{\theta(\lambda)} &\geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (1.28)$$

اگر $\theta_0 \geq 2$ ، سمت راست معادله 1.28 در نقطه ای از ژئودزیک برابر صفر است. بنابراین، سمت چپ نیز باید در نقطه ای باید برابر صفر باشد که به انبساط بی نهایت مربوط می شود. چنین نتیجه ای به طور شهودی غیر فیزیکی به نظر می رسد و می توان نشان داد که با برخی از خواص سیاه چاله شناخته شده در تضاد است. انبساط افق در امتداد هر مولد ژئودزیک پوچ η سطحی η منفی است. از آنجا که ما ممکن است η را افق رویداد یک سیاهچاله انتخاب کنیم و انبساط مربوط به تغییر اندازه عنصر مساحت η است، نشان داده ایم که مساحت افق هرگز کاهش نمی یابد.

قضیه افزایش مساحت محدود به سیاهچاله هایی است که کاملاً با نسبیت عام توصیف شده اند و بنابراین ، امکان کاهش ناحیه افق در طی فرایندهایی که در آن ساختار میکروسکوپی سیاهچاله مرتبط می شود را محدود نمی کند.

1.2.2 آنتروپی سیاه چاله

ناحیه افق رویداد A یک سیاهچاله را می توان بر حسب جرم غیر قابل کاهش آن M_{ir} ، یعنی $A = 16\pi M_{ir}^2$ بیان کرد. جرم غیر قابل کاهش به عنوان جرمی تعریف می شود که با هیچ فرایند کلاسیکی (مانند فرایند پنروز) از سیاهچاله خارج نمی شود. به دلیل قضیه افزایش مساحت، جرم غیر قابل تقلیل، نمی تواند کاهش یابد. برای یک سیستم ترمودینامیکی، انرژی ای که نمی تواند به کار تبدیل شود، برابر حاصل ضرب دما و آنتروپی است. جرم غیر قابل کاهش را نیز می توان بخشی از کل انرژی سیاهچاله دانست که نمی تواند به کار تبدیل شود. علاوه بر این، جرم غیر قابل کاهش یک سیستم سیاهچاله ها در واقع کوچکتر از مجموع جرم های کاهش ناپذیر آنها است زیرا می توانند در هنگام ادغام، امواج گرانشی ساطع کرده و جرم کل آنها را کاهش دهند. بنابراین، اگرچه جرم کل سیاهچاله شوارتزیلد برابر با جرم غیرقابل کاهش آن است (این از رابطه بین جرم غیر قابل تقلیل و مساحت افق آشکار است) و نمی توان از آن انرژی استخراج کرد، اما دو سیاهچاله شوارتزیلد همچنان می توانند از خود انرژی به فرم امواج گرانشی ساطع کنند. هنگام ادغام آنها به طور مشابه، با قرار دادن دو سیستم ترمودینامیکی که به طور جداگانه در تعادل حرارتی و در تماس هستند، می توان کار بیشتری از آنها استخراج کرد. در نتیجه، برخی از شباهت ها بین جرم غیر قابل کاهش یک سیاهچاله و آنتروپی یک سیستم ترمودینامیکی وجود دارد و اگر بخواهیم برای آنتروپی سیاه چاله عبارتی بسازیم، جرم غیر قابل کاهش، نقطه شروع مناسبی است. [3]

ما می توانیم آنتروپی سیاهچاله را به عنوان یک عملکرد یکنواخت در حال افزایش در منطقه افق آن (یا معادل آن، جرم غیر قابل کاهش) تعریف کنیم. دو گزینه احتمالاً منطقی ترین هستند: یک، ریشه مربع، که آنتروپی را به عنوان یک تابع خطی از جرم غیر قابل کاهش و یک تابع خطی می دهد. با این حال، یک ریشه مربع از ناحیه افق یک سیاه چاله شوارتزیلد از ادغام دو سیاهچاله دیگر شوارتزیلد کمتر از مجموع ریشه های مربعی مناطق افق آنها است. بنابراین، آنتروپی متناسب با یک ریشه مربعی در چنین فرایندی کاهش می یابد. بنابراین بکشتاین تصمیم گرفت تا عبارتی برای آنتروپی بسازد که متناسب با مساحت افق سیاهچاله باشد (در عبارات زیر از واحدهای استاندارد استفاده خواهیم کرد):

$$s = \eta \frac{k_B c^3}{G \hbar} \alpha \quad (1.29)$$

که α ناحیه افق منطقی (rationalized horizon area) $(\alpha = \frac{A}{4\pi})$ و η ثابت بی بعد است. عامل $\frac{c^3}{G}$ فقط تبدیل واحدهای هندسی به استاندارد است. ثابت پلانک عمدتاً در فرمول گنجانده شد زیرا وجود آن اطمینان می دهد که آنتروپی در واحدی صحیح، یعنی $[S] = J \cdot K^{-1}$ بیان شده است. بکشتاین بیان کرد که ثابت پلانک در واقع

در فرمولهای آنتروپی بسیاری از سیستمها وجود دارد، در نتیجه این واقعیت که آنتروپی را می توان به عنوان شمارش حالت‌های احتمالی میکروسکوپی یک سیستم در نظر گرفت طبیعت کوانتومی او حدس زد که همین استدلال ممکن است در مورد آنتروپی سیاهچاله نیز صدق کند و بنابراین وجود داشتن ثابت پلانک کاملاً طبیعی است. ثابت η را می توان به طور تقریبی با بررسی افتادن ذره ای در سیاهچاله و سپس مقایسه افزایش مساحت با از اطلاعات از دست رفته به دست آورد. بکنشتاین نشان داد که افزایش مساحت $d\alpha$ در چنین حالتی برابر حداقل $2b\mu$ است، جایی که b شعاع ذرات و μ جرم سکون آن است. شعاع مناسب b باید به وضوح بزرگتر یا مساوی هم طول موج کامپتون ذره $\frac{h}{\mu}$ و شعاع گرانشی آن 2μ باشد. [3]

این مسئله به ما حد پایین را میدهد $\Delta\alpha_{min} = 2\hbar$ که منجر میشود به:

$$\eta = \frac{\ln 2}{2} \quad (1.30)$$

بکنشتاین آنتروپی سیاه چاله را به صورت زیر تخمین میزند:

$$S = \frac{k_B c^3 \ln 2}{8\pi G \hbar} A \quad (1.31)$$

هاوکینگ یک ثابت تناسب متفاوت از ثابت بکنشتاین تعیین کرد. فرمول او برای آنتروپی سیاهچاله به صورت زیر است:

$$S = \frac{k_B c^3}{4G \hbar} A \quad (1.32)$$

در اینجا عامل عددی تقریباً ده برابر بیشتر از فرمول اصلی بکنشتاین است. دلیل این، تعاریف متفاوت از دمای سیاهچاله است. بکنشتاین در چارچوب نسبیت عام کلاسیک کار می کرد که در آن دمای موثر ترمودینامیکی سیاهچاله برابر با صفر بود. وی از عبارت $-\frac{hk}{2\eta k_B}$ (در اینجا k گرانش سطحی سیاهچاله است که بعداً تعریف می کنیم) به عنوان آنالوگ دمای سیاهچاله استفاده کرد. با در نظر گرفتن اثر مکانیکی کوانتومی، هاوکینگ نشان داد که دمای ترمودینامیکی سیاهچاله در واقع $\frac{hk}{2\pi k_B}$ است. [4]

بنابراین ، هم بکنشتاین و هم هاوکینگ به یک مقدار یکسان دما و آنتروپی رسیدند، اما همانطور که عبارات مختلف دما را در نظر گرفتند، فرمول های آنها برای آنتروپی متفاوت است.

بیان آنتروپی سیاهچاله شوارتزیلد با جرم M در واحدهای SI بر حسب جرم خورشید $M_\odot$ برابر است با:

$$S \approx 1.45 \times 10^{54} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 J.K^{-1} \quad (1.33)$$

آنتروپی خورشید به ترتیب $10^{35} J.K^{-1}$ این امر بدیهی می سازد که آنتروپی در واحد جرم یک سیاهچاله به مراتب بزرگتر از ستارگان است.

سیاهچاله کر کر نیومن به طور کامل با جرم، بار و حرکت زاویه ای آن توصیف می شود. راه های زیادی وجود دارد که می توان سیاهچاله ای با مقادیر معینی از این سه کمیت ایجاد کرد، برای مثال با فروپاشی یک ستاره معمولی، فروپاشی یک ستاره نوترونی، برخورد امواج گرانشی، برخورد دو سیاه چاله و ...، اما هنگامی که یک سیاهچاله ایجاد می شود، این موارد غیرقابل تشخیص می شوند. آنتروپی سیاهچاله را می توان بعنوان معیاری برای عدم دسترسی به اطلاعات در مورد ساختار داخلی خاص آن تفسیر کرد. ما در حال حاضر عبارتی برای آنتروپی سیاه چاله داریم که حداقل در نسبیت عام کلاسیک، کاهش نمی یابد و هنگامی که سیاهچاله ماده را جذب می کند، افزایش می یابد. همچنین مستقل از ساختار ماده در داخل افق رویداد است. از آنجا که در تئوری امکان اندازه گیری جرم، اندازه حرکت زاویه ای و بار سیاه چاله و استفاده از آنها برای محاسبه مساحت افق رویداد وجود دارد، آنتروپی سیاهچاله را می توان حداقل در اصل توسط یک ناظر خارجی تعیین کرد. به زودی خواهیم دید که آنتروپی در اولین قانون ترمودینامیک سیاه چاله ایفا می کند.

این استدلال بکنشتاین را به نوشتن قانون دوم عمومی ترمودینامیک سوق داد: آنتروپی در بیرون سیاهچاله به علاوه آنتروپی سیاهچاله هرگز کاهش نمی یابد [3].

1.3 قانون اول

این استدلال بکنشتاین را به تدوین قانون دوم عمومی ترمودینامیک سوق داد: آنتروپی در خارج سیاهچاله به علاوه آنتروپی سیاهچاله هرگز کاهش نمی یابد. ما با در نظر گرفتن مساحت α چنین سیاهچاله ای با جرم M ، اندازه حرکت زاویه ای J و بار Q شروع می کنیم. میتوانیم ببینیم که:

$$\alpha = r_+^2 + a^2 \quad (1.34)$$

$$\alpha = 2Mr_+ - Q^2 \quad (1.35)$$

که در آن

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (1.36)$$

مقادیر مختصات شعاعی مربوط به افق رویداد سیاهچاله کر نویمان است. ما می توانیم یک فرمول برای تفاوت جرم δM بین دو سیاه چاله ی تقریباً متفاوت کر-نویمان کمی متفاوت بدست آوریم. با تغییر معادله 1.35

$$\delta\alpha = 2(r_+\delta M + M\delta r_+ - Q\delta Q) \quad (1.37)$$

اکنون δr_+ را جداگانه محاسبه می کنیم:

$$\delta r_+ = 8M + \frac{2}{r_+ - r_-} \left(M\delta M - \alpha \left(\frac{\delta J}{-M} + \frac{\alpha}{M} - Q\delta Q \right) - Q\delta Q \right) \quad (1.38)$$

با جایگزینی این نتیجه به دست می آوریم:

$$\delta\alpha = 2 \left(r_+\delta M + M\delta M + \frac{2}{r_+ - r_-} (M^2\delta M - \alpha\delta J + \alpha^2\delta M - MQ\delta Q) - Q\delta Q \right)$$

هدف ما بدست آوردن فرمولی برای تغییر جرم است. پس همه جملات حاوی δM را در سمت چپ قرار می دهیم:

$$\begin{aligned}
& 2 \left(r_+ + M + \frac{2}{r_+ - r_-} (M^2 + \alpha^2) \right) \delta M \\
& = \delta \alpha + 2 \frac{2}{r_+ - r_-} \left(\alpha \delta J + \left(M + \frac{r_+ - r_-}{2} \right) Q \delta Q \right) \\
& \frac{2}{r_+ - r_-} (r_+ (r_t - r_-) + M(r_+ - r_-) + 2M^2 + 2\alpha^2) \delta M \\
& = \delta \alpha + \frac{4}{r_+ - r_-} (\alpha \delta J + r_+ Q \delta Q) \\
& \frac{2}{r_+ - r_-} (2M(r_t - r_-) + 2M^2 - 2Q^2 - 2\alpha^2 + 2M^2 + 2\alpha^2) \delta M \\
& = \delta \alpha + \frac{4}{r_+ - r_-} (\alpha \delta J + r_+ Q \delta Q) \tag{1.39}
\end{aligned}$$

با استفاده از معادله 1.35، به شکل نهایی قانون اول می‌رسیم:

$$\delta M = \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} \delta \alpha + \frac{a}{\alpha} \delta J + \frac{r_+ Q}{\alpha} Q \delta Q \tag{1.40}$$

اگر این معادله را با معادل ترمودینامیکی آن مقایسه کنیم، می‌بینیم که اگر تغییر جرم سیاهچاله با تغییر انرژی مطابقت داشته باشد، عبارت $\frac{a}{\alpha} \delta J + \frac{r_+ Q}{\alpha} Q \delta Q$ معادل کار انجام شده در سیاهچاله به منظور تغییر بار و حرکت زاویه ای آن. به طور خاص، $\frac{a}{\alpha}$ فرکانس زاویه ای چرخش سیاهچاله را نشان می‌دهد و $\frac{r_+ Q}{\alpha} Q$ پتانسیل الکتریکی در افق رویداد خارجی است. از آنجا که $\delta \alpha$ متناسب با آنتروپی سیاهچاله است، عبارت $\frac{r_+ - r_-}{4\alpha}$ ضرب در ثابت معین (مشابه دمای سیاهچاله است).

دمای تعریف شده به این شکل، همانند دمای ترمودینامیکی، نامنفی است. با این حال، اصطلاح دما را نمی‌توان برای سیاهچاله ای که کاملاً با نسبییت عام توصیف شده است، به کار برد، زیرا چنین سیاه چاله ای تابش نمی‌کند و بنابراین نمی‌تواند در هر دمای غیر صفر با تابش جسم سیاه در تعادل حرارتی قرار گیرد.

1.3.2 فرمول باردین-کارتر-هاوکینگ

کارتر و هاوکینگ و باردین در مقاله خود [1] ، اولین قانون دینامیک سیاهچاله ها را به صورت کلی تری به دست آوردند که برای هر فضا-زمان مسطح غیر متقارن محوری تخت که شامل یک سیاهچاله است، صادق است. آنها هر دو شکل انتگرالی و دیفرانسیلی قانون اول را ارائه کردند. ما هر دو نسخه را به طور مفصل با توجه به روشی که در مقاله اصلی استفاده شده است ، استخراج می کنیم.

فرمول انتگرال

از آنجا که قانون اول اساساً بیانگر قانون بقای انرژی است، اولین هدف ما بدست آوردن عبارت برای کل انرژی موجود در فضا زمان است. ما از معادله 1.10 برای دومین مشتق بردار انتقال زمان کیلینگ شروع می کنیم و هر دو طرف آن را در بر روی ابرسطح Σ که آن را فضاگونه انتخاب میکنیم و مماس با میدان بردار متقارن محوری کیلینگ انتگرال میگیریم. سپس می توان از این واقعیت استفاده کرد که $\xi^{\mu;v}$ نامتقارن است و سمت چپ را به انتگرال بر روی یک مرز دو سطحی از ابرسطح Σ تبدیل کنیم این مرز از افق رویداد سیاهچاله و دو سطح دیگر تشکیل شده است که یک مرز بیرونی را تشکیل می دهند. با استفاده از این واقعیت که همه اجزای تانسور ریچی در خلا برابر صفر هستند، می توان مرز بیرونی را به صورت دلخواه در فاصله دور انتخاب کرد. راحت ترین انتخاب یک دو-سطحی تخت و فضاگونه است که در بی نهایت قرار دارد و مماس با میدان بردار کیلینگ ξ_μ است

$$\int_{\Sigma} \xi^{\mu;v}{}_{,v} d\Sigma_{\mu} = - \int R^{\mu}{}_{,v} \xi^v d\Sigma_{\mu} \quad (1.41)$$

$$\int_{\partial\Sigma} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu v} = - \int_{\Sigma} R^{\mu}{}_{,v} \xi^v d\Sigma_{\mu} \quad (1.42)$$

$$\int_{\partial\Sigma_{\infty}} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu v} = - \int_{\Sigma} R^{\mu}{}_{,v} \xi^v d\Sigma_{\mu} - \int_{\partial B} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu v} \quad (1.43)$$

اولین انتگرال در سمت راست معادله 1.43 را میتوانیم با استفاده از معادله ی 1.15 به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} R^{\mu}{}_{,v} \xi^v d\Sigma_{\mu} &= 8\pi \int_{\Sigma} \left(T^{\mu}{}_{,v} - \frac{1}{2} T g^{\mu}{}_{,v} \right) \xi^v d\Sigma_{\mu} \\ &= 8\pi \int_{\Sigma} \left(T^{\mu}{}_{,v} - \frac{1}{2} T \delta^{\mu}{}_{,v} \right) \xi^v d\Sigma_{\mu} \end{aligned} \quad (1.44)$$

اگر بردار شعاعی نرمال $\rho^\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}(0, 1, 0, 0)$ را معرفی کنیم، می توانیم المان سطح $d\Sigma_\mu$ را در بی نهایت به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma_\infty} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu\nu} &= \int_{\partial\Sigma_\infty} \xi^{\mu;v} \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \xi^{[\alpha} \rho^{\beta]} d\Sigma \\ &= \int_{\partial B} g^{rr} \xi^t_{;r} \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} g_{tt} g_{rr} \xi^t \rho^r d\Sigma \end{aligned} \quad (1.45)$$

ما در یک فضا-زمان مسطح کار می کنیم که می تواند بر اساس معیار بویئر-لیندکوئیست بیان شود که در فاصله ی بسیار دور از منبع انرژی به متریک شوارتزشیلد همگرا می شود. سپس، ما به راحتی می توانیم مشتق هم وردای بردار انتقال زمان کیلینگ در مختصات شوارتزشیلد را ارزیابی کنیم:

$$\begin{aligned} \xi^t_{;r} &= \xi^t_{,r} + g^{tt}(g_{tt,r} + g_{rt,t} - g_{tr,t})\xi^t = g^{tt} \frac{1}{2} g_{tt,r} \xi^t \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(-\frac{2M}{r^2}\right) \xi^t = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{M}{r^2} \xi^t \end{aligned} \quad (1.46)$$

المان مساحت $d\Sigma$ از Σ_∞ دو سطحی به سادگی المان مساحت یک دو-کره در یک فضا-زمان مسطح است. انتگرال سمت چپ معادله 1.43 را می توان به راحتی دید که برای شعاع ثابت بزرگ، به بی نهایت میل میکند

$$\int_{\partial\Sigma_\infty} \frac{M}{r^2} \xi^t \xi_t d\Sigma = -\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{M}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi M \quad (1.47)$$

با این نتیجه در نهایت خواهیم داشت

$$M = \int_\Sigma (2T^\mu_v - T\delta^\mu_v) \xi^v d\Sigma_\mu + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu\nu} \quad (1.48)$$

اولین عبارت در سمت راست در حال حاضر به طور کامل توسط خواص ماده در خارج از سیاه چاله تعیین می شود. عبارت دوم را می توان به عنوان کل انرژی سیاهچاله تفسیر کرد که هنوز امکان تقسیم آن به چند بخش جداگانه وجود دارد.

ما با بدست آوردن عبارتی برای کل تکانه زاویه ای L فضا زمان شروع می کنیم. برای این منظور، معادله 1.10 را، این بار برای میدان برداری متقارن محوری ξ^μ بر روی همان ابرسطحی Σ که تا کنون استفاده کرده ایم، انتگرال میگیریم. ما دوباره سمت چپ را به انتگرال بر روی مرز تغییر می دهیم و از معادلات اینشتین برای سمت راست استفاده می کنیم. همچنین، می توانیم از این واقعیت استفاده کنیم که ابرسطحی Σ طوری انتخاب شد که $\xi^\mu d\Sigma_\mu = 0$ باشد. در پایان ما نیاز داریم:

$$\begin{aligned} \int \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu\nu} &= -8\pi \int_{\Sigma} \left(T_v^\mu - \frac{1}{2} T \delta_v^\mu \right) \xi^v d\Sigma_\mu - \int_{\partial B} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu\nu} \quad (1.49) \\ &= -8\pi \int_{\Sigma} T_v^\mu \xi^v d\Sigma_\mu - \int_{\partial B} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu\nu} \end{aligned}$$

ما انتگرال سمت چپ را حساب خواهیم کرد. این بار باید از مختصات Boyer-Lindquist استفاده کنیم و عنصر سطح $d\Sigma_{\mu\nu}$ باید به صورت $\tau_{[\mu\rho\nu]}$ نوشته شود که در آن بردار $T^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} + \omega^2 g_{\phi\phi}}} (\xi^\mu + \omega \tilde{\xi}^\mu)$ نرمال شده است و به $\tilde{\xi}^\mu$ عمود است. به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
\int \xi^{\mu;v} \tau_{[\mu\rho\nu]} d\Sigma &= \int_{\partial\Sigma_\infty} \frac{1}{2} g^{\beta\mu} (g_{\beta\gamma,\nu} + g_{\nu\beta,\gamma} - g_{\gamma\nu,\beta}) \tilde{\xi}^\gamma g_{\alpha\mu} \tau^\alpha p^\nu d\Sigma \\
&= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} + \omega \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Sigma\Delta}} \sqrt{\Sigma} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Sigma}} \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{-\Sigma + 2r^2}{\Sigma^2} + \frac{r}{\mathcal{A}} \frac{\Sigma \mathcal{A}_{,r} - 2r\mathcal{A}}{\partial r} \right) \frac{\mathcal{A}}{\Sigma} \sin^3\theta d\theta d\varphi \\
&= J \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-\mathcal{A} + r\mathcal{A}_{,r}) \frac{1}{\Sigma^2} \sin^3\theta d\theta d\varphi \\
&= J \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-(r^2 + a^2) + (r^2 - 2Mr + a^2) a^2 \sin^2\theta \right. \\
&\quad \left. + (r^3 + a^2) 4r^2 - (2r^2 - 2Mr) a^2 \sin^2\theta \right) \frac{1}{\Sigma^2} \sin^3\theta d\theta d\varphi \\
&= J \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3r^4 + 2a^2 r^2 - a^4 + a^4 \sin^2\theta - a^2 r^2 \sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\frac{1}{\Sigma^2} \sin^3\theta d\theta d\varphi = 8\pi J \tag{1.51}$$

حاصل در حد r به بی‌نهایت نزدیک می‌شود بی‌اهمیت است، اما در واقع برای هر مقدار r صادق است. پس از جایگزینی $8\pi J$ در سمت چپ آن، معادله 1.49 نتیجه می‌دهد: [5]

$$J = - \int_{\Sigma} T^\mu_{\nu} \tilde{\xi}^\nu d\Sigma_\mu - \frac{1}{8\pi} \int \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu\nu} \tag{1.52}$$

اولین جمله در سمت راست برابر است با کل حرکت زاویه ای ماده در خارج از سیاهچاله. از آنجایی که نتیجه $8\pi J$ به مختصات شعاعی بستگی ندارد، جمله دوم دقیقاً تکانه زاویه ای سیاهچاله را J_H نشان می‌دهد:

$$J_H = - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \xi^{\mu;v} d\Sigma_{\mu\nu} \tag{1.53}$$

اگر اکنون انتگرال $\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \xi^{\mu;\nu} d\Sigma_{\mu\nu}$ را بر حسب میدان برداری کیلینگ l^μ (معادله 1.11) بازنویسی کنیم و تکانه زاویه ای سیاهچاله J_H معادله 1.48 شکل می گیرد:

$$M = \int_{\Sigma} (2T_v^\mu - T\delta_v^\mu) \xi^v d\Sigma_\mu + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} l^{\mu;\nu} d\Sigma_{\mu\nu} + 2\Omega_H J_H \quad (1.54)$$

تانسور $d\Sigma_{\mu\nu}$ را می توان در افق به صورت $l_{[\mu} n_{\nu]} dA$ بیان کرد، که در آن n^ν یک بردار تهی متعامد به افق است و نرمال می شود به طوری که $n_\mu l^\mu = -1$ و dA عنصر سطحی افق است. سپس $\kappa = -l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu$ را تعریف می کنیم و از آن برای بازنویسی عبارت دوم در سمت راست معادله 1.54 استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} l^{\mu;\nu} d\Sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} l_{\mu;\nu} l^{[\mu} n^{\nu]} dA \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{2} l_{\mu;\nu} (l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu) dA \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{2} (-2) l_{\mu;\nu} l^\nu n^\mu dA = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \kappa dA \end{aligned} \quad (1.55)$$

اگر بردارهای تهی مزدوج مختلط m^μ ، $\bar{m}^\mu$ نرمال در افق را تعریف کنیم به طوری که $m_\mu \bar{m}^\mu = 1$ ، آنها یک مجموعه ی تهی را همراه با بردارهای l^μ و n^μ تشکیل می دهند. سپس متریک در افق را می توان بیان کرد:

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu \quad (1.56)$$

شرط $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$ باعث میشود:

$$n_{\mu\nu;\lambda} = n_\mu n^\nu l_{\nu;\lambda} \quad (1.57)$$

$$l_{\mu\nu;\lambda} = l_\mu l^\nu n_{\nu;\lambda} \quad (1.58)$$

چهار بردار $a^\mu = \frac{l_\nu l^{\mu;\nu}}{l_\lambda l^\lambda}$ و اسکالر $v = \sqrt{l_\rho l^\rho}$ را معرفی میکنیم. سپس برای ذره ای بی نهایت نزدیک به افق V به a میل میکند داریم:

$$\begin{aligned}
 Va = V\sqrt{a_\mu a^\mu} &= \sqrt{l_\rho l^\rho} \sqrt{\frac{l_\nu l^{\mu;\nu} l^k l_{\mu;k}}{l_\lambda l^\lambda l_\sigma l^\sigma}} = \sqrt{\frac{l_\nu l^\mu l_\lambda n^{\lambda;\nu} l^k l_\mu l^\rho n_{\rho;k}}{l_\sigma l^\sigma}} \\
 &= \sqrt{l_\nu l_\lambda n^\lambda n_\mu l^{\mu;\nu} l^k l^\rho n_\rho n^\sigma l_{\sigma;k}} = \kappa
 \end{aligned} \quad (1.59)$$

از معادلات 1.57 و 1.58 برای به دست آوردن سه کمیت آخر استفاده شده است. چهار سرعت u^μ ذره ای که به طور صلب با سیاهچاله در خارج از افق می چرخد را می توان به صورت $u^u = \frac{l^u}{\sqrt{l_\lambda l^\lambda}}$ نوشت. شتاب مربوطه $u^\mu_{;\nu} u^\nu = \frac{l^\mu_{;\nu} l^\nu}{l_\lambda l^\lambda} = \alpha^\mu$ و اندازه ی آن a است. اگر اکنون این را در V ضرب کنیم، نتیجه شتاب در واحد زمان ویژه ذره را به شتاب در واحد زمان مختصات تبدیل می کنیم. از آنجایی که ما در یک فضا زمان مجانب مسطح کار می کنیم، مختصات زمان به معنای زمان ویژه برای ناظری است که در بی نهایت ساکن است. بنابراین، κ در افق برابر با شتاب یک ذره است که با سیاهچاله درست خارج از افق رویداد خود می چرخد که توسط چنین ناظری اندازه گیری می شود. در این معنا κ به معنای گرانش سطحی سیاهچاله است که اصطلاحی است که معمولاً برای آن استفاده می شود. اکنون نشان خواهیم داد که κ در افق ثابت است. برای انجام این کار، ثابت خواهیم کرد که κ در امتداد میدان برداری m^μ تغییر نمی کند و بنابراین در افق ثابت است:

$$k_{;\mu} m^\mu = (-l^\lambda_{;\nu} n^\lambda l^\nu)_{;\mu} m^\mu = l^\lambda_{;\nu\mu} n^\lambda l^\nu m^\mu - l^\lambda_{;\nu} n^\lambda_{;\mu} l^\nu m^\mu - l^\lambda_{;\nu} n^\lambda l^\nu_{;\mu} m^\mu \quad (1.60)$$

می توانیم از اولین هویت بیانچی و معادلات 1.8 و 1.9 برای بازنویسی اولین عبارت عبارت قبلی استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}
 R_{k\mu\nu\lambda} l^k &= (-R_{k\lambda\mu\nu} - R_{k\nu\lambda\mu}) l^k = -l^\lambda_{;\mu\nu} + l^\lambda_{;\nu\mu} - l^\nu_{;\lambda\mu} + l^\nu_{;\mu\lambda} = 2l^\lambda_{;\nu\mu} - l^\lambda_{;\mu\nu} + l^\lambda_{;\nu\mu} \\
 &= 2l^\lambda_{;\nu\mu} - R_{k\mu\nu\lambda} l^k
 \end{aligned}$$

برای همین به دست می آوریم:

$$l^\lambda_{;\nu\mu} = R_{k\mu\nu\lambda} l^k \quad (1.61)$$

با کمک معادلات 1.57 و 1.58 می توانیم نشان دهیم که فقط عبارت با $l^\lambda_{;\nu\mu}$ در معادله 1.60 باقی می ماند، زیرا دو جمله دیگر با هم صفر می دهند:

$$-l^\lambda_{;\nu} n^\lambda_{;\mu} l^\nu m^\mu = -l^\lambda_{;\nu} n^\lambda n^\kappa l_{\mu;\kappa} l^\nu m^\mu = \kappa l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu \quad (1.62)$$

$$-l_{;\nu}^{\lambda} n^{\lambda} l_{;\mu}^{\nu} m^{\mu} = l_{;\nu}^{\lambda} n^{\lambda} l^{\nu} l^k n_{;\mu} m^{\mu} = \kappa n_k n^{\nu} l_{\nu;\mu} l^k m^{\mu} = -\kappa l_{\mu;\nu} n^{\mu} m^{\nu} \quad (1.63)$$

در نهایت به دست می آوریم:

$$\kappa_{;\mu} m^{\mu} = -R_{k\lambda\nu\mu} l^k m^{\lambda} l^{\nu} n^{\mu} \quad (1.64)$$

با استفاده از معادله ی 1.56 و نامتقارن بودن $l_{\mu;\nu}$ به دست می آوریم:

$$0 = l^{\mu;\nu} g_{\mu\nu} = l^{\mu;\nu} (-l_{\mu} n_{\nu} - n_{\mu} l_{\nu} + m_{\mu} \bar{m}_{\nu} + \bar{m}_{\mu} m_{\nu}) = 2l^{\mu;\nu} m_{\mu} \bar{m}_{\nu} \quad (1.65)$$

حال از این معادله در راستای m^{λ} مشتق میگیریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (l_{\mu;\nu} m^{\mu} \bar{m}^{\nu})_{;\lambda} m^{\lambda} = R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\mu} m^{\nu} m^{\lambda} + l_{\mu;\nu} (m^{\mu} \bar{m}^{\nu})_{;\lambda} m^{\lambda} \\ &= R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\mu} \bar{m}^{\nu} m^{\lambda} \end{aligned} \quad (1.66)$$

که آن را میتوانیم به صورت زیر ادامه دهیم:

$$\begin{aligned} -R_{\lambda k} l^k m^{\lambda} &= g^{\mu\nu} R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\lambda} \\ &= (-l^{\mu} n^{\nu} - n^{\mu} l^{\nu} + m^{\mu} \bar{m}^{\nu} + \bar{m}_{\mu} m_{\nu}) R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\lambda} \\ &= (-n^{\mu} l^{\nu} + m^{\mu} \bar{m}^{\nu}) R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\lambda} \end{aligned} \quad (1.67)$$

مرحله آخر با استفاده از خاصیت پادمتقارنی تانسور ریمان، نتیجه آن را می توان با استفاده از اولین رابطه ی بیانچی دوباره مینویسیم:

$$\begin{aligned} (-n^{\mu} l^{\nu} + m^{\mu} \bar{m}^{\nu}) R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\lambda} &= R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\mu} \bar{m}^{\nu} m^{\lambda} \\ &\quad - n^{\mu} l^{\nu} (-R_{k\lambda\mu\nu} - R_{k\nu\lambda\mu}) l^k m^{\lambda} \\ &= R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\mu} \bar{m}^{\nu} m^{\lambda} + R_{k\lambda\mu\nu} l^k m^{\lambda} n^{\mu} l^{\nu} \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} R_{k\mu\nu\lambda} l^k m^{\mu} \bar{m}^{\nu} m^{\lambda} &= -R_{k\lambda} l^k m^{\lambda} + R_{k\lambda\nu\mu} l^k m^{\lambda} l^{\nu} n^{\mu} \\ &= -R_{k\lambda} l^k m^{\lambda} - K_{;\mu} m^{\mu} = 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

این به ما معادله ای برای مشتق هم وردای κ در راستای m^{μ} میدهد:

$$K_{;\mu} m^{\mu} = -R_{k\lambda} l^k m^{\lambda} \quad (1.70)$$

با استفاده از معادله ی 1.15 و عمود بودن m^μ و l^μ به دست می آوریم:

$$k_{;\mu} m^\mu = -8\pi \left(T_{k\lambda} + \frac{1}{2} T g_{k\lambda} \right) l^k m^\lambda = -8\pi T_{k\lambda} l^k m^\lambda \quad (1.71)$$

بردار $T_{k\lambda} l^k$ فضاگونه نیست، زیرا l^k یک بردار تهی است و ما انتظار داریم که شرط انرژی غالب رعایت شود. ما دوباره معادله 1.26 را در نظر می گیریم. برای انبساط یک ثابت سیاهچاله، برش و پیچش افق رویداد ناپدید می شود (افق در کنار مولد ژئودزیکی پوچ تغییر نمی کند). با در نظر گرفتن اینکه k^μ در این مسئله برابر است با l^μ ، معادله 1.26 به ما میدهد:

$$0 = R_{k\lambda} l^k l^\lambda = 8\pi \left(T_{k\lambda} - \frac{1}{2} T g_{k\lambda} \right) l^k l^\lambda = 8\pi T_{k\lambda} l^k l^\lambda \quad (1.72)$$

در مرحله آخر استفاده کردیم که در افق l^μ یک بردار تهی است. سپس نتیجه می شود که $T_{k\lambda} l^k$ یا صفر یا موازی با l^λ است، و بنابراین $T_{k\lambda} l^k l^\lambda = 0$. در نتیجه، $\kappa_{;\mu} m^\mu = 0$ را بدست می آوریم و ثابت کرده ایم که κ در افق ثابت است.

اکنون می توانیم معادله 1.55 را به شکل نهایی آن بازنویسی کنیم:

$$M = \int_S (2T_\nu^\mu - T S_\nu^\mu) \xi^\nu d\Sigma_\mu + 2\Omega_H J_H + \frac{\kappa}{4\pi} A \quad (1.73)$$

این فرمول انتگرالی برای قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله است. ماهیت این عبارت مشابه معادله اوایلر از ترمودینامیک استاندارد است که کل انرژی داخلی یک سیستم ترمودینامیکی را به عنوان تابعی از متغیرهای ترمودینامیکی آن بیان می کند. به طور مشابه، معادله 1.73 کل انرژی موجود در فضازمان را به ما می دهد. اولین عبارت در سمت راست شامل تمام سهم انرژی از ماده خارج از سیاهچاله است. برای اصلاح بیشتر این عبارت، باید تانسور انرژی-تکانه ماده را مشخص کنیم. عبارات باقیمانده سهمی از پارامترهای سیاهچاله دارند. عبارت $2\Omega_H J_H$ نشان دهنده کل انرژی چرخشی سیاهچاله است. از آنجایی که A متناسب با آنتروپی سیاهچاله است جمله آخر را مشابه با عبارت θS (θ که دمای ترمودینامیکی است) در معادله اوایلر مشاهده کنیم. در بخش 1.6 ما نشان خواهیم داد که واقعاً چنین است (در واقع، برابر $2\theta S$ است) اما همانطور که در بخش 1.3.1 بحث شد، چنین تفسیری در زمینه نسبیت عام کلاسیک غیرممکن است.

معادله ی دیفرانسیلی

هدف بعدی ما بدست آوردن نتیجه ای مشابه با فرمول بکنشتاین 1.40 با تغییر معادله 1.73 است. برای سادگی، و همچنین برای دریافت تفسیر فیزیکی واضح تر از کمک های ماده بیرونی، خود را به موردی از یک سیاهچاله محدود می کنیم که توسط یک سیال کامل احاطه شده است که توزیع آن ثابت و متقارن است. ما ممکن است چنین سیالی را با چگالی انرژی $\varepsilon(n, S)$ توصیف کنیم، که در آن n چگالی عدد ذره و S چگالی آنتروپی است. سپس دما θ ، پتانسیل شیمیایی μ و فشار P با روابط ترمودینامیکی استاندارد تعریف می شوند:

$$\theta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} \quad (1.74)$$

$$\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \quad (1.75)$$

$$P = \mu n + \theta S - \varepsilon \quad (1.76)$$

تانسور انرژی - مومنتوم را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)v_\mu v_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (1.77)$$

$$v^\mu = \frac{1}{\sqrt{-u_\lambda u^\lambda}} u^\mu \quad (1.78)$$

$$u^\mu = \xi^\mu + \Omega \tilde{\xi}^\mu \quad (1.79)$$

در اینجا بردار v^μ واحد مماس بر خطوط جریان است. چهار سرعت سیال را می توان به صورت $u^\mu = u^t(\xi^\mu + \Omega \tilde{\xi}^\mu)$ بیان کرد، در غیر این صورت ایستایی و تقارن محوری فضا زمان از بین می رود. سپس Ω سرعت زاویه ای سیال است. تکانه زاویه ای، آنتروپی و تعداد ذرات سیال را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$J = -\int_S T_\nu^\mu \tilde{\xi}^\nu d\Sigma_\mu \quad (1.81)$$

$$S = \int_S s v^\mu d\Sigma_\mu \quad (1.82)$$

$$N = \int_S n v^\mu d\Sigma_\mu \quad (1.83)$$

هنگام مقایسه دو راه حل کمی متفاوت، آزادی خاصی در انتخاب نقاطی وجود دارد که قرار است با آنها مطابقت داشته باشند. ما ابرسطوح Σ ، افق رویداد، و میدان های برداری کیلینگ ξ^μ و $\tilde{\xi}^\mu$ را انتخاب می کنیم تا در هر دو راه حل یکسان باشند. سپس داریم:

$$\partial \xi^\mu = \partial \tilde{\xi}^\mu = 0 \quad (1.83)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g_{\nu\lambda} \delta g^{k\lambda} \quad (1.84)$$

$$\delta \xi_\mu = h_{\mu\nu} \xi^\nu \quad (1.85)$$

$$\delta \tilde{\xi}_\mu = h_{\mu\nu} \tilde{\xi}^\nu \quad (1.86)$$

$$\delta l^\mu = \tilde{\xi}^\mu \delta \Omega_H \quad (1.87)$$

$$\delta l_\mu = \delta(g_{\mu\nu} l^\nu) = h_{\mu\nu} l^\nu + \tilde{\xi}_\nu \delta \Omega_H \quad (1.88)$$

از آنجایی که افق های رویداد یکسان هستند، میدان های برداری l^μ ، n^μ نرمال نسبت به افق در راه حل اول با همتایان خود در راه حل دوم موازی هستند:

$$l_{[\mu} \delta l_{\nu]} = \frac{1}{2} (l_\mu \delta l_\nu - l_\nu \delta l_\mu) \propto \frac{1}{2} (l_\mu l_\nu - l_\nu l_\mu) = 0 \quad (1.89)$$

$$n^{[\mu} \delta n^{\nu]} = 0 \quad (1.90)$$

به همین دلیل مشتق لی δl_μ نسبت به l^ν صفر است:

$$\mathcal{L}_1 \delta l_\mu = (\delta l_\mu)_{;\nu} l^\nu + l^\nu_{;\mu} \delta l_\nu = 0 \quad (1.88)$$

ما از این روابط برای به دست آوردن تغییرات κ استفاده میکنیم:

$$\begin{aligned}\delta\kappa &= -n^\mu l^\nu (\delta l_\mu)_{;\nu} - l_{\mu;\nu} n^\mu \delta l^\nu - l_{\mu;\nu} l^\nu \delta n^\mu \\ &= n^\mu l^\nu (\delta l_\nu)_{;\mu} + l_{\nu;\mu} n^\mu \delta l^\nu + l_{\nu;\mu} l^\nu \delta n^\mu \\ &= \frac{1}{2} (l^\nu \delta l_\nu + l_\nu \delta l^\nu)_{;\mu} n^\mu + l^{\nu}_{;\mu} l_\nu \delta n^\mu\end{aligned}$$

قدم بعدی استفاده از معادله ی 1.87 برای به دست آوردن تغییرات l^μ است:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} l^\nu n^\mu (\delta l_\nu)_{;\mu} + \frac{1}{2} l^{\nu}_{;\mu} n^\mu \delta l_\nu + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^{\nu}_{;\mu} l_\nu n^\mu \delta \Omega_H + \frac{1}{2} l_{\nu;\mu} n^\mu \delta (g^{\nu\lambda} l_\lambda) + l^{\nu}_{;\mu} l_\nu \delta n^\mu \\ = \frac{1}{2} l^\nu n^\mu (\delta l_\nu)_{;\mu} + l^{\nu}_{;\mu} n^\mu \delta l_\nu + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^{\nu}_{;\mu} l_\nu n^\mu \delta \Omega_H - \frac{1}{2} l^{\rho}_{;\mu} n^\mu h_{\rho\sigma} l^\sigma \\ + l^{\nu}_{;\mu} l_\nu \delta n^\mu\end{aligned}$$

عبارت چهارم را با استفاده از معادله 1.88 بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} l^\nu n^\mu (\delta l_\nu)_{;\mu} + l^{\nu}_{;\mu} n^\mu \delta l_\nu + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^{\nu}_{;\mu} l_\nu n^\mu \delta \Omega_H - \frac{1}{2} l^{\rho}_{;\mu} n^\mu h_{\rho\sigma} l^\sigma \quad (1.92) \\ + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^{\rho}_{;\mu} l^\rho n^\mu \delta \Omega_H + l^{\nu}_{;\mu} l_\nu \delta n^\mu \\ = \frac{1}{2} l^\nu n^\mu (\delta l_\nu)_{;\mu} + l^{\nu}_{;\mu} n^\mu \delta l_\nu + \frac{1}{2} (\tilde{\xi}^{\nu} l_\nu)_{;\mu} n^\mu \delta \Omega_H \\ + \frac{1}{2} l^{\rho} n^\nu (\delta l_\mu)_{;\rho} + l^{\nu}_{;\mu} n^\mu \delta l_\nu\end{aligned}$$

با استفاده از معادله ی 1.91:

$$\frac{1}{2} (\delta l_\nu)_{;\mu} (l^\nu n^\mu + l^\mu n^\nu) + l^{\nu}_{;\mu} (n^\mu \delta l_\nu + l_\nu \delta n^\mu) + \tilde{\xi}^{\nu}_{;\mu} l_\nu n^\mu \delta \Omega_H \quad (1.93)$$

$$= \frac{1}{2} (\delta l_\nu)_{;\mu} (l^\nu n^\mu + l^\mu n^\nu) + \tilde{\xi}^{\nu}_{;\mu} l_\nu n^\mu \delta \Omega_H \quad (1.94)$$

از آنجایی که δl^μ با l^μ در افق متناسب است، $(\delta l_\mu)_{;\nu} m^\mu \tilde{m}^\nu = 0$. بنابراین، با استفاده از عبارت 1.56 برای متریک به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \delta \kappa &= \frac{1}{2} (\delta l_\nu)_{;\mu} (-g^{\mu\nu}) + \xi_{;\mu}^\nu l_\nu n^\mu \delta \Omega_H \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\delta (g_{\nu\lambda} l^\lambda) \right)^{;\nu} + \xi_{;\mu}^\nu l_\nu n^\mu \delta \Omega_H \\
 &= -\frac{1}{2} (h_{\nu\lambda} l^\lambda)^{;\nu} - \frac{1}{2} (\delta l^\lambda)_{;\lambda} + \xi_{;\mu}^\nu l_\nu n^\mu \delta \Omega_H \\
 &= -\frac{1}{2} h_{\nu\lambda}^{;\nu} l^\lambda - \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} l^{\lambda;\nu} + \xi_{;\mu}^\nu l_\nu n^\mu \delta \Omega_H \\
 &= -\frac{1}{2} h_{\nu\lambda}^{;\nu} l^\lambda + \xi_{;\mu}^\nu l_\nu n^\mu \delta \Omega_H
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

ما تمام ابزارهای لازم برای تغییر معادله 1.73 را جمع آوری کرده ایم که آن را به شکل زیر بیان می کنیم:

$$M = \int_{\Sigma} \left(2T_\nu^\mu + \frac{1}{8\pi} R \delta_\nu^\mu \right) \xi^\nu d\Sigma_\mu + 2\Omega_H J_H + \frac{\kappa}{4\pi} A \tag{1.96}$$

در ابتدا δR را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \delta R &= \delta (g^{\nu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^\mu) = R_{\nu\lambda} \delta (g^{\nu\lambda}) + g^{\nu\lambda} \delta (R_{\nu\mu\lambda}^\mu) \\
 &= -R_{\nu\lambda} h^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda} \delta (R_{\nu\mu\lambda}^\mu)
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

در مرحله دوم، ما تغییرات تانسور ریمان را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \delta (R_{\nu\mu\lambda}^\mu) &= \delta \Gamma_{\nu\lambda,\mu}^\mu - \delta \Gamma_{\nu\mu,\lambda}^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\mu \\
 &\quad - \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu
 \end{aligned} \tag{1.98}$$

بنابراین $\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ یک تانسور است و می توانیم مشتق پادوردای آن را به روش استاندارد گسترش دهیم. سپس ممکن است مشاهده کنیم: [6]

$$\begin{aligned}
(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)_{;\mu} &= \delta\Gamma_{\nu\lambda,\mu}^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu \delta\Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \delta\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \\
(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)_{;\lambda} &= \delta\Gamma_{\nu\mu,\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \\
\delta(R_{\nu\mu\lambda}^\mu) &= (\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)_{;\mu} - (\delta\Gamma_{\nu\mu}^\mu)_{;\lambda}
\end{aligned} \tag{1.99}$$

می‌توانیم این نتیجه را بر حسب تغییر متریک بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
&(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)_{;\mu} - (\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)_{;\lambda} \\
&= h_{;\mu}^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\nu\lambda} + g^{\sigma\mu} (\delta\Gamma_{\sigma\nu\lambda})_{;\mu} + h_{;\lambda}^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\nu\mu} - g^{\sigma\mu} (\delta\Gamma_{\sigma\nu\mu})_{;\lambda}
\end{aligned} \tag{1.100}$$

ما از نمادهای کریستوفل برای بازنویسی جمله‌هایی که شامل $\delta\Gamma$ هستند استفاده خواهیم کرد.

$$\begin{aligned}
&g^{\sigma\mu} (\delta\Gamma_{\sigma\nu\lambda})_{;\mu} - g^{\sigma\mu} (\delta\Gamma_{\sigma\nu\mu})_{;\lambda} \\
&= \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} [(h_{\sigma\nu,\lambda} + h_{\lambda\sigma,\nu} - h_{\nu\lambda,\sigma})_{;\mu} \\
&\quad - (h_{\sigma\nu,\mu} + h_{\mu\sigma,\nu} - h_{\nu\mu,\sigma})_{;\lambda}]
\end{aligned} \tag{1.101}$$

تغییر تانسور ریچی را می‌توان به طور فشرده به صورت $2g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} h_{\sigma[\mu;\nu]\lambda}$ نوشت که می‌توان با بسط این عبارت نشان داد:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} h_{\sigma\mu;\nu\lambda} &= g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \left((h_{\sigma\mu,\nu})_{;\lambda} - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho h_{\rho\mu;\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho h_{\sigma\mu;\lambda} \right) \\
2g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} h_{\sigma[\mu;\nu]\lambda} &= g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \left((h_{\sigma\mu,\nu})_{;\lambda} - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho h_{\rho\mu;\lambda} - (h_{\sigma\nu,\mu})_{;\lambda} + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho h_{\rho\nu;\lambda} \right)
\end{aligned} \tag{1.102}$$

زمانی که از متریک برای بالا و پایین کردن اندیس‌ها و دوباره نام گذاری کردن آنها به این نتیجه میرسیم:

$$g^{\mu\nu} \delta(R_{\nu\mu\lambda}^\mu) = -h_{[\mu;\nu]}^{\mu\nu} \tag{1.103}$$

به منظور تغییر ترم $\int_{\Sigma} \frac{1}{8\pi} R \delta_{\nu}^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu}$ ، ما همچنین باید $\delta(\xi^{\mu} \sqrt{-\tilde{g}} \zeta_{\mu}) = \delta(\xi^{\mu} d\Sigma_{\mu})$ را بررسی کنیم، جایی که ζ^{μ} برابر است. بردار واحد نرمال به ابرسطح Σ و $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \zeta_{\mu} \zeta_{\nu}$ پیش بینی متریک روی Σ . از آنجایی که هر دو ابرسطحی Σ و بردار کشنده ξ^{μ} تحت تأثیر تغییرات قرار نمی گیرند، ما فقط باید $\delta\sqrt{-\tilde{g}}$ را پیدا کنیم. می توانیم از هویت زیر برای یک مشتق از تعیین کننده هر ماتریس غیرمفرد استفاده کنیم: [7]

$$Tr\left(\frac{dA}{d\lambda} A^{-1}\right) = \frac{1}{detA} \frac{d}{d\lambda} (detA) \quad (1.104)$$

عبارت $\delta\sqrt{-\tilde{g}}$ را بسط می دهیم و سپس معادله 1.104 را اعمال می کنیم:

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-\tilde{g}} &= \frac{\partial\sqrt{-\tilde{g}}}{\partial g^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{-\tilde{g}}}{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\partial(-\tilde{g})}{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-\tilde{g}}} (-\tilde{g}) \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.105)$$

اکنون باید با عبارت $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}}$ را به دست بیاوریم. برای این کار ابتدا ثابت میکنیم:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \delta_{\beta}^{\alpha}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial (g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} = g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\gamma\beta} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial g^{\mu\nu}} \\ g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} &= -g_{\gamma\beta} \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\gamma} + \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\gamma}) \\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

با جایگزینی تعریف $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ در معادله 1.105 و استفاده از متعامد بودن $d\Sigma_{\mu}$ و ζ^{μ} و معادله 1.106 نتیجه نهایی را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-\tilde{g}} &= \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial (g_{\alpha\beta} - \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \\ &\left(-\frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) - \zeta_{\alpha} \frac{\partial \zeta_{\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} - \zeta_{\beta} \frac{\partial \zeta_{\alpha}}{\partial g^{\mu\nu}} \right) h^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.107)$$

از آنجایی که Σ تحت تأثیر تغییرات قرار نمی گیرد، $\tilde{g}_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ را می توان با $g_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ جایگزین کرد. بنابراین، دلتای $\xi^\mu d\Sigma_\mu$ برابر است $-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \xi^\mu d\Sigma_\mu$. در کل، دلتای $\int_\Sigma \frac{1}{8\pi} R \delta^\mu_\nu \xi^\nu d\Sigma_\mu$ برابر است با:

$$\delta \int_\Sigma \frac{1}{8\pi} R \delta^\mu_\nu \xi^\nu d\Sigma_\mu = -\frac{1}{8\pi} \int_S \left(\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) h^{\mu\nu} + 2 h^\mu_{[\mu;\nu]}{}^\nu \right) \xi^\lambda d\Sigma_\lambda \quad (1.108)$$

ابتدا باید یک عبارت را با تغییر آخرین جمله در معادله 1.108 بدست آوریم. با استفاده از معادلات 1.83، 1.85 و 1.8، معادله ی 1.7 را تغییر خواهیم داد:

$$0 = g_{\mu\nu;\lambda} \xi^\lambda + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda_{;\mu} + g_{\lambda\mu} \xi^\lambda_{;\nu} \quad (1.109)$$

$$0 = \delta \left(g_{\mu\nu;\lambda} \xi^\lambda - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\lambda} \xi^\lambda - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} \xi^\lambda + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda_{;\mu} + g_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\mu} \xi^\kappa + g_{\lambda\mu} \xi^\lambda_{;\nu} + g_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\kappa\nu} \xi^\kappa \right) = h_{\mu\nu;\lambda} \xi^\lambda + h_{\lambda\nu} \xi^\lambda_{;\mu} + h_{\lambda\mu} \xi^\lambda_{;\nu}$$

حال میتوانیم جمله ی $2h^\mu_{[\mu;\nu]}{}^\nu \xi^\lambda$ را بنویسیم:

$$2h^\mu_{[\mu;\nu]}{}^\nu \xi^\lambda = (h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^\lambda)^{;\nu} - 2h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^{\lambda;\nu}$$

بسط جمله ی دوم برابر است با:

$$-2h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^{\lambda;\nu} = 2h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^{v;\lambda} = (h^\mu_{\mu;\nu} \xi^\nu - h^\mu_{\nu;\mu} \xi^\nu)^{;\lambda} - 2h^\mu_{[\mu;\nu]}{}^\lambda \xi^\nu$$

اکنون نگاهی جداگانه به هر عبارت از این معادله خواهیم داشت:

$$(h^\mu_{\mu;\nu} \xi^\nu - h^\mu_{\nu;\mu} \xi^\nu)^{;\lambda} = (-3h_{\mu\nu} \xi^{\mu;\nu} - (h^\mu_{\nu} \xi^\nu)_{;\mu})^{;\lambda} = (0 - (\delta \xi^\nu)_{;\mu})^{;\lambda} = 0$$

$$-2h^\mu_{[\mu;\nu]}{}^\lambda \xi^\nu = -h^\mu_{\mu;\nu}{}^\lambda \xi^\nu + h^\mu_{\nu;\mu}{}^\lambda \xi^\nu = -h^\mu_{\mu}{}^{\mu;\lambda}{}_\nu + h^\mu_{\nu;\mu}{}^\lambda \xi^\nu$$

حال می‌توانیم عبارت دوم را با استفاده از معادله 1.109 دوباره بنویسیم:

$$\begin{aligned} h^\mu_{\mu;\nu} \lambda \xi^\nu &= (h^\mu_{\nu;\mu} \xi^\nu)^{;\lambda} - h^\mu_{\nu;\mu} \xi^{\nu;\lambda} = 0 - (h^\mu_{\nu} \xi^{\nu;\lambda})_{;\mu} + h_{\mu\nu} \xi^{\nu\lambda;\mu} \\ &= (h^\lambda_{\nu} \xi^{\nu;\mu} + h^{\lambda\mu}_{;\mu} \xi^\nu)_{;\mu} + h_{\mu\nu} \xi^{\nu\lambda;\mu} \\ &= h^\lambda_{\mu} \xi^{\nu;\mu} + (- (h^\lambda_{\nu} \xi^\mu)_{;\nu} + h^{\lambda\mu}_{;\mu} \xi^\nu)_{;\mu} + h_{\mu\nu} \xi^{\nu\lambda;\mu} \end{aligned}$$

همه عبارت ها به جز مورد اول برابر صفر میشوند:

$$\begin{aligned} &(- (h^\lambda_{\nu} \xi^\mu)_{;\nu} + h^{\lambda\mu}_{;\mu} \xi^\nu)_{;\mu} + h_{\mu\nu} \xi^{\nu\lambda;\mu} \\ &= R^{\sigma\mu}_{\nu\mu} h^\lambda_{\sigma} \xi^\nu + R^{\sigma\lambda}_{\nu\mu} h^\mu_{\sigma} \xi^\nu + h_{\mu\nu} R^{\mu\nu\lambda}_{\sigma} \xi^\sigma - h^\lambda_{\nu} R_{\sigma\mu}^{\nu\mu} \xi^\sigma = 0 \end{aligned}$$

ما از تقارن تانسور ریمان و بردارهای کیلینگ، معادله 1.61 و همچنین رابطه ها استفاده کردیم.

$$h^\mu_{\mu;\nu\lambda} - h^\mu_{\mu;\lambda\nu} = R^\sigma_{\nu\mu\lambda} h^\mu_{\sigma} + R^\sigma_{\nu\mu\lambda} h^\mu_{\sigma} = 0 \quad (1.110)$$

$$h^{\lambda\mu}_{;\nu\mu} - h^{\lambda\mu}_{;\mu\nu} = R^{\sigma\mu}_{\nu\mu} h^\lambda_{\sigma} + R^{\sigma\lambda}_{\nu\mu} h^\mu_{\sigma} \quad (1.111)$$

در کل نشان دادیم:

$$2h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^\lambda = (2h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^\lambda - 2h^\mu_{[\mu;\lambda]} \xi^\nu)_{;\nu} \quad (1.112)$$

این عبارت پادمتقارن است و به ما این امکان را می دهد که انتگرال را بر روی ابر سطح Σ به انتگرال بر روی مرز آن تبدیل کنیم:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} 2h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^\lambda d\Sigma_\lambda \\ &= - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} (h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^\lambda - h^\mu_{[\mu;\lambda]} \xi^\nu)_{;\nu} d\Sigma_\lambda = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} (h^\mu_{[\mu;\nu]} \xi^\lambda - h^\mu_{[\mu;\lambda]} \xi^\nu) d\Sigma_{\lambda\nu} \end{aligned} \quad (1.113)$$

مرز دوباره توسط دو سطح $\partial\Sigma_\infty$ و ∂B مشابه معادله 1.43 تشکیل می شود. در این مورد، می توانیم در حین انتگرال روی $\partial\Sigma_\infty$ از مختصات شوارتزشیلد استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} (h_\mu^{[\mu;\nu]} \xi^\lambda - h_\mu^{[\mu;\lambda]} \xi^\nu) d\Sigma_{\lambda\nu} \\
 & = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} (h_\mu^{[\mu;\nu]} \xi^\lambda - h_\mu^{[\mu;\lambda]} \xi^\nu) \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} \xi_{[\lambda\rho\nu]} d\Sigma \\
 & = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} (-h^\mu_{\mu;r} + h^\mu_{r;\mu}) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\
 & = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g^{\mu\nu} (-h^\mu_{\mu;r} + h^\mu_{r;\mu}) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta
 \end{aligned} \tag{1.114}$$

تنها کمیت در متریک شوارتزشیلد تحت تأثیر تغییراتی که در نظر می گیریم، جرم کل M است که فقط تابعی از g_{rr} ، g_{tt} است:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g^{\mu\nu} (-h^\mu_{\mu;r} + h^\mu_{r;\mu}) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\
 & = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-g^{tt} h_{tt;r} - g^{rr} h_{rr;r} + g^{rr} h_{rr;r}) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\
 & = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-\frac{2\delta M}{r^2}\right) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \delta M
 \end{aligned} \tag{1.115}$$

از آنجایی که h_{tt} با $\frac{1}{r}$ متناسب است و نمادهای کریستوفل مربوطه با $\frac{1}{r^2}$ متناسب است، می توانیم از حد $r \rightarrow \infty$ استفاده کنیم و در نتیجه $h_{tt;r} = h_{tt,r}$. علاوه بر آن عبارات باقی مانده را متناسب با $\frac{1}{r^3}$ اکنون با استفاده از $d\Sigma_{\mu\nu} = l_{[\nu} n_{\mu]} dA$ با انتگرال در افق را حساب میکنیم:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} (h_\mu^{[\mu;\nu]} \xi^\lambda - h_\mu^{[\mu;\lambda]} \xi^\nu) d\Sigma_{\lambda\nu} \quad (1.116) \\
& = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} (h_\mu^{[\mu;\nu]} \xi^\lambda - h_\mu^{[\mu;\lambda]} \xi^\nu) (l_\lambda n_\nu - l_\nu n_\lambda) dA = \\
& = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \left(-h_\mu^{[\mu;\nu]} l^\lambda + \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} \tilde{\xi}^\lambda \right) (l_\lambda n_\nu - l_\nu n_\lambda) dA \\
& = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \left(\frac{1}{2} h_\mu^{\mu;\nu} l^\lambda + \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} \tilde{\xi}^\lambda \right) (l_\lambda n_\nu - l_\nu n_\lambda) dA \\
& = -\frac{A}{4\pi} \delta\kappa - 2J_H \delta\Omega_H + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} \tilde{\xi}^\lambda d\Sigma_{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

ما از معادله 1.95 برای تغییر گرانش سطح و تعریف تکانه زاویه ای سیاهچاله استفاده کرده ایم (معادله 1.53).
 انتگرال $\frac{1}{4\pi} \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} \tilde{\xi}^\lambda$ روی 2-سطح $\partial\Sigma_\infty$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} \tilde{\xi}^\lambda d\Sigma_{\lambda\nu} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} g_{t\varphi} d\Sigma \quad (1.117)$$

عبارات غالب انتگرال به صورت $\frac{1}{r}$ به صفر میل میکند و بنابراین انتگرال برابر با صفر است. ما می توانیم از آن برای بازگشت به ادغام در ابر سطح Σ استفاده کنیم و از این واقعیت استفاده کنیم که معادله 1.112 برای هر میدان برداری Killing برقرار است (این یک نتیجه مستقیم از معادله کیلینگ است):

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} \tilde{\xi}^\lambda d\Sigma_{\lambda\nu} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \Omega_H h_\mu^{[\mu;\nu]} \tilde{\xi}^\lambda d\Sigma_{\lambda\nu} \quad (1.118)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_S \Omega_H h_{[\mu;\nu]}^\mu \tilde{\xi}^\lambda d\Sigma_{\lambda\nu} = 0 \quad (1.119)$$

آخرین انتگرال برابر با صفر است زیرا ابرسطح Σ مماس بر میدان برداری $\tilde{\xi}^\mu$ انتخاب شد. اگر اکنون از معادلات اینشتین استفاده کنیم، نتیجه نهایی را به دست می آوریم:

$$\delta \int_\Sigma \frac{1}{8\pi} R \delta^\mu_\nu d\Sigma_\mu = - \int_\Sigma T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \tilde{\xi}^\lambda d\Sigma_\mu - \delta M + \frac{A}{4\pi} \delta\kappa + 2J_H \delta\Omega_H \quad (1.120)$$

دلتای ترم تانسور انرژی-تکانه به دست می آید:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{\Sigma} 2T^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu} &= -2 \int_{\Sigma} \Omega \delta(T^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu}) + 2 \int_{\Sigma} \Omega (T^{\mu}_{\nu} u^{\nu} d\Sigma_{\mu}) \\
 &= 2 \int_{\Sigma} \Omega \delta dJ + 2 \int_{\Sigma} \delta(((\varepsilon + p)v^{\mu} v_{\mu} + p g^{\mu}_{\nu}) u^{\nu} d\Sigma_{\mu}) \\
 &= 2 \int_{\Sigma} \Omega \delta dJ + 2 \int_{\Sigma} \delta(p \xi^{\mu} d\Sigma_{\mu}) + 2 \int_{\Sigma} u^{\nu} \delta((\mu n \\
 &\quad + \theta s) \frac{1}{-g_{\kappa\lambda} u^{\kappa} u^{\lambda}} u_{\nu} \xi^{\mu} d\Sigma_{\mu}) \\
 &= 2 \int_{\Sigma} \Omega \delta dJ + 2 \int_{\Sigma} \delta((\mu n + \theta s + p) \xi^{\mu} d\Sigma_{\mu}) \\
 &\quad + 2 \int_{\Sigma} (\mu n + \theta s) h_{\kappa\lambda} v^{\kappa} v^{\lambda} \xi^{\mu} d\Sigma_{\mu} \\
 &= 2 \int_{\Sigma} \Omega \delta dJ + 2 \int_{\Sigma} \bar{\theta} s d\Sigma + 2 \int_{\Sigma} \bar{\mu} \delta d\Sigma + 2 \int_{\Sigma} T^{\kappa\lambda} h_{\kappa\lambda} \xi^{\mu} d\Sigma_{\mu}
 \end{aligned} \tag{1.121}$$

تساوی اول از تعریف سیال چهار سرعت u^{μ} استفاده می کند. ما همچنین مکرراً از متعامد ξ^{μ} و $d\Sigma_{\mu}$ استفاده کردیم. در معادله ی نهایی همه ی کمیت های اندازه گیری شده توسط یک ناظر در بی نهایت مجانبی داده می شود، در حالی که کمیت های موجود در تانسور انرژی-تکانه به طور محلی توسط ناظری که با سیال حرکت می کند اندازه گیری می شوند. برای توضیح این موضوع، پتانسیل شیمیایی با انتقال سرخ $\bar{\mu}$ را معرفی کرده ایم:

$$\bar{\mu} = \sqrt{-g_{\kappa\lambda} u^{\kappa} u^{\lambda}} \mu \tag{1.122}$$

دمای انتقال سرخ $\bar{\theta}$:

$$\bar{\theta} = \sqrt{-g_{\kappa\lambda} u^{\kappa} u^{\lambda}} \theta \tag{1.123}$$

ما همچنین تغییر حرکت زاویه ای سیال را که از $d\Sigma_{\mu}$ عبور می کند تعریف کرده ایم:

$$\delta dJ = -\delta(T^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu}) \tag{1.124}$$

تغییر در تعداد ذرات عبوری از $d\Sigma_\mu$

$$\delta dN = \delta \left(s \frac{1}{\sqrt{-g_{\kappa\lambda} u^\kappa u^\lambda}} \xi^\mu d\Sigma_\mu \right) \quad (1.125)$$

$$\delta dS = \delta \left(s \frac{1}{\sqrt{-g_{\kappa\lambda} u^\kappa u^\lambda}} \xi^\mu d\Sigma_\mu \right) \quad (1.126)$$

با کنار هم قرار دادن نتایج هر دو تغییر، فرمول جرم دیفرانسیل را بدست می آوریم:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \int_S \Omega \delta dJ + 2 \int_S \bar{\theta} \delta dS + \int_S \bar{\mu} \delta dN + \Omega_H \delta dJ_H \quad (1.127)$$

دو عبارت اول تغییرات در انرژی سیاهچاله را توصیف می کنند. ما به زودی نشان خواهیم داد که در مورد فضازمان کر، معادل عبارات موجود در فرمول بکنشتاین 1.40 است. سه عبارت باقیمانده توزیع نرمال ترمودینامیکی سیال ایده آل در خارج از سیاهچاله است. اولی گرمای منتقل شده به سیال را می دهد، دومی کار انجام شده روی سیال برای تغییر تعداد ذرات و سومی کار انجام شده روی سیال برای تغییر تکانه زاویه ای آن. همه این عبارات ها از بی نهایت مجانبی اندازه گیری می شوند.

فرمول های سیاهچاله کر

حال بررسی میکنیم که چگونه این فرمول های توسط باردین، کارتر و هاوکینگ برای یک سیاهچاله کر نوشته. در فرمول انتگرال، جمله تانسور انرژی-ممنتوم صفر می شود در نتیجه خواهیم داشت:

$$M = 2\Omega_H J_H + \frac{\kappa}{4\pi} A \quad (1.128)$$

در اینجا M و $J_H = M_\alpha$ پارامترهایی در مختصات بویئر-لیندکوئیست هستند که در رابطه 1.16 ارائه شده است. با تجزیه و تحلیل مدارهای ناظران ساکن در اطراف سیاهچاله کر، می توان نشان داد که $\Omega_H = \omega(r_+)$ مساحت افق برابر $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ است. با استفاده از این روابط و معادله 1.128، می توانیم κ را به عنوان تابعی از پارامترهای متریک کر بیان کنیم:

$$\begin{aligned} \kappa &= 4\pi \frac{M - 2\Omega_H J_H}{A} = M \frac{1 - 2\omega(r_+)a}{r_+^2 + a^2} = \frac{1 - \frac{4Ma^2r_+}{\mathcal{A}(r_+)}}{2r_+} \\ &= \frac{r_+^2 - a^2}{2r_+(r_+^2 + a^2)} = \frac{r_+^2 - r_+r_-}{2r_+\alpha} = \frac{r_+ - r_-}{2\alpha} \end{aligned} \quad (1.129)$$

در طول محاسبه از معادلات 1.34 - 1.36 با بار سیاهچاله Q برابر با صفر استفاده کردیم. فرمول دیفرانسیل برای سیاهچاله کر برابر میشود با:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J_H \quad (1.130)$$

همانطور که تمام عبارات توصیف کننده سیال خارج از سیاهچاله به وضوح برابر با صفر هستند، می توانیم عباراتی را برای Ω_H و κ وارد کنیم:

$$\delta M = \frac{a}{\alpha} \delta J + \frac{r_+ - r_-}{16\pi\alpha} \delta A = \frac{a}{\alpha} \delta J + \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} \delta \alpha \quad (1.131)$$

این فرمول بکنشتاین اولین قانون برای سیاهچاله کر با $Q = 0$ است. بنابراین، هر دو نسخه از قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله، برای مورد سیاهچاله کر، نتیجه یکسانی به دست می دهند.

1.4 قانون صفر

در قسمتی از مراحل برای به دست آوردن فرمول انتگرال ما نشان دادیم که گرانش سطح K در افق رویداد یک سیاهچاله ساکن ثابت است. از آنجایی که قبلاً دیدیم که نقش K در قانون اول مشابه با دمای ترمودینامیکی در ترمودینامیک استاندارد است، این قیاس قانون صفر ترمودینامیک را به ما می دهد که بیان می کند برای یک سیستم در تعادل حرارتی دما در کل ثابت است. سیستم. در واقع، دمای فیزیکی واقعی یک سیاهچاله (مرتبط با توزیع تابش جسم سیاهی که از خود ساطع می کند) توسط هاوکینگ نشان داده شده است: [8]

$$\frac{\kappa}{2\pi}$$

این نتیجه از اثرات مکانیکی کوانتومی ناشی می شود و در بخش 1.6 مورد بحث قرار خواهد گرفت.

1.5 قانون سوم

قانون سوم توسط کارتر، هاوکینگ و بردین به دست آمد که بیان میکرد: با هر روشی، مهم نیست که چقدر ایده آل باشد، غیرممکن است که گرانش سطح سیاهچاله K را با یک دنباله محدود از عملیات به صفر برسانیم. [1]

می بینیم که این عبارت تقریباً با فرمول نرنست از قانون سوم استاندارد یکسان است، فقط دمای ترمودینامیکی با گرانش سطح جایگزین می شود. برای بیان K برای سیاهچاله کر (معادله 1.129، همان عبارت برای سیاهچاله کر-نیومن صدق می کند) ما به راحتی می توانیم بررسی کنیم که K غیر منفی و برابر با صفر است فقط در مورد سیاهچاله اکستریمال $r_+ = r_- = M$ علاوه بر این، فرض کنیم می خواهیم K را با پرتاب ذرات داخل سیاهچاله به صفر برسانیم. کارآمدترین روش پرتاب آنها به روشی است که افزایش تکانه زاویه ای سیاهچاله را برای جرم معین یک ذره به حداکثر برساند. سپس می توان نشان داد که کاهش K به ازای هر ذره پرتاب شده به داخل کاهش می یابد زیرا K به سمت صفر میل می کند. اسرائیل بعداً دلیلی بر این قانون ارائه کرد. [9]

از سوی دیگر، بدست آوردن معادل فرمول قانون سوم پلانک غیرممکن به نظر می رسد. بیان می کند که وقتی دمای هر سیستم ترمودینامیکی به صفر مطلق می رسد، آنتروپی مقداری ثابت دلخواه مستقل از پارامترهای ماکروسکوپی سیستم (که معمولاً روی صفر تنظیم می شود) به دست می آورد. با این حال، محاسبه آنتروپی یک سیاهچاله ی اکستریمال πM^2 است که به وضوح به جرم سیاهچاله بستگی دارد.

در صورتی که $M^2 < a^2 + Q^2$ یا $M^2 < a^2$ به ترتیب برای سیاهچاله کر و کر-نویمان، مقادیر r_+ و r_- موهومی میشوند، افق رویداد دیگر وجود ندارد و تکینگی در مرکز یک سیاهچاله می تواند با بقیه جهان در ارتباط باشد. چنین موردی به عنوان تکینگی برهنه شناخته می شود. وجود تکینگی های برهنه در جهان ما، حداقل در زمینه نسبیت عام، به این معنی است که فضا زمان دیگر به صورت مجانبی قابل پیش بینی نخواهد بود (به عنوان مثال، یک راه حل برای مسئله کوشی با داده های اولیه پس از دریافت اطلاعات از تکینگی که با نسبیت عام قابل پیش بینی نیست، می تواند بر آن تأثیر بگذارد). پیش بینی مجانبی برای بسیاری از نتایج مهم در مورد سیاهچاله ها، از جمله قضیه افزایش مساحت، ضروری است. در سال 1965، پنروز فرضیه سانسور کیهانی را پیشنهاد کرد که بیان می کرد تکینگی های برهنه نمی توانند تحت شرایط واقعی فیزیکی ظاهر شوند.[1] اینکه آیا این فرضیه پابرجاست یا نه، یکی از مهم ترین پرسش های بی پاسخ فیزیک نسبیتی باقی مانده است. قانون سوم ترمودینامیک سیاهچاله، احتمال تبدیل شدن یک سیاهچاله غیر اکستریمال به حالت اکستریمال و حتی کمتر یک تکینگی برهنه را رد می کند، و بنابراین یک استدلال مهم به نفع سانسور کیهانی است، هرچند این احتمال وجود دارد که یک تکینگی برهنه می تواند باشد. ایجاد شده به روشی متفاوت باقی می ماند.[6]

1.6 تابش هاوکینگ و دمای سیاه چاله

همانطور که قبلاً ذکر شد، هیچ تفسیر رضایت بخشی از دمای سیاهچاله در زمینه نسبیت عام کلاسیک وجود ندارد. برای نسبت دادن دمای ترمودینامیکی غیر صفر به یک جسم، باید آن را با یک حمام حرارتی بی نهایت با همان دما به تعادل ترمودینامیکی برسانیم و جسم همان مقدار گرمایی را که دریافت می کند تابش می کند. این البته برای یک سیاهچاله کلاسیک غیرممکن است، زیرا هیچ چیز نمی تواند از افق رویداد آن فرار کند. بنابراین، تنها مقدار معقول دمای ترمودینامیکی آن صفر است. با این حال، هاوکینگ در سال 1974 نشان داد که وقتی اثرات کوانتومی در نظر گرفته می شود، سیاهچاله ها با طیفی مطابق با جسم سیاهی با دمای $\kappa/2\pi$ تابش می کنند. او این نتیجه را با تجزیه و تحلیل یک میدان کوانتومی بر روی پس زمینه کلاسیک راه حل شوارتزشیلد هاوکینگ به دست آورد. ما از رویکرد متفاوتی استفاده خواهیم کرد که توسط Parikh و Wilczek توسعه یافته است. که در آن حد نیمه کلاسیک نظریه کوانتومی (WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin در نظر گرفته شده و تابش هاوکینگ به عنوان تونل زنی ذرات از سیاهچاله در نظر گرفته می شود.[4], [10]

هدف ما تجزیه و تحلیل تونل زنی یک ذره انرژی مثبت به بیرون از افق رویداد سیاهچاله شوارتزشیلد در امتداد یک ژئودزیک پوچ شعاعی یا به طور معادل، تونل زنی یک ذره انرژی منفی در داخل افق است. برای انجام این کار، یک سیستم مختصات بدون تکینگی در افق مورد نیاز است. ما از یک تبدیل مناسب مختصات 1.22، مختصات Gullstrand-Painlevé استفاده خواهیم کرد:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{R}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega \quad (1.133)$$

مختصات زمان t از مختصات زمان شوارتزشیلد t_S با تبدیل زیر به دست می آید:

$$t = t_S + 2M\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{|\sqrt{r} - \sqrt{2M}|}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}} \quad (1.134)$$

مختصات مکانی بدون تغییر باقی مانده است. عنصر خطی که توسط معادله 1.133 ارائه می شود ثابت است (اما دیگر ایستا نیست) و در طول افق بدون تکینگی است (رفتار تکینگی در افق به تعریف مختصات زمانی منتقل می شود). این ویژگی مختصات Gullstrand-Painlev'e را برای ارزیابی فرآیندهای فیزیکی نزدیک به افق مناسب تر می کند. ژئودزیک تهی شعاعی در این مختصات با معادله داده می شود:

$$\frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}} \quad (1.135)$$

در اینجا علامت مثبت مربوط به یک خروجی و علامت منفی به یک ژئودزیک ورودی است.

در حالی که رویکرد تونل زنی برای تابش هاوکینگ ممکن است در ابتدا طبیعی به نظر برسد، ما به زودی با این سوال روبرو می شویم: مانعی که تونل های ذرات از آن عبور می کنند چیست؟ یک موقعیت معمولی برای تونل زنی کوانتومی شامل دو نقطه عطف کلاسیک است که توسط یک منطقه کلاسیک ممنوع با اندازه محدود از هم جدا شده اند. با این حال، یک جفت ذره، یکی با انرژی مثبت و دیگری با انرژی منفی، می تواند در داخل افق رویداد به طور دلخواه نزدیک به آن ایجاد شود و زمانی که ذره انرژی مثبت درست خارج از افق قرار گرفت، می تواند به طور کلاسیک از سیاهچاله دور شود. برای ذره انرژی منفی، همین استدلال فقط در مورد درون و بیرون افق رد و بدل شده صدق می کند. بنابراین به نظر می رسد که فاصله جدایی بین نقاط عطف کلاسیک است. اگر صریحاً حفظ انرژی را اعمال کنیم، وضعیت تغییر می کند. [11] سپس در طول فرآیند انتشار، انرژی کل سیاهچاله با انرژی ذره ساطع شده کاهش می یابد و شعاع افق آن نیز بر این اساس کاهش می یابد. سپس شکاف بین موقعیت اصلی و جدید شعاع، منطقه ممنوعه کلاسیک بین نقاط عطف است که ذره باید از طریق آن تونل بزند. از این نظر فرآیند تونل زنی خود مسئول وجود مانع است. کراوس و ویلچک نشان دادند که اگر جرم کل ADM در فضا زمان ثابت باشد و جرم سیاهچاله تغییر کند، ذره ای از انرژی ω در امتداد ژئودزیک توصیف شده توسط معادله 1.133 حرکت می کند، جایی که $(M - \omega)$ را به جای M جایگزین می کنیم. [12]

می توان به راحتی نشان داد که نرخ تونل زنی در تقریب WKB با e^{2ImS} متناسب است، جایی که S مخفف عمل است. برای بدست آوردن نرخ تونل زنی (بدون پیش فاکتور) باید قسمت خیالی عمل را روی یک ژئودزیک شعاعی تهی بین نقطه شروع r_{in} و نقطه پایان r_{out} ارزیابی کنیم. ما یک ذره انرژی مثبت با تکانه زاویه ای صفر (ذره با موج S) را در نظر خواهیم گرفت. قسمت موهومی عمل برابر است با: [12]

$$ImS = Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr \quad (1.136)$$

اکنون انتگرال را در دو طرف معادله همیلتون $\frac{dr}{dt} = \frac{dH}{dp'_r}$ ضرب و تقسیم می کنیم. متغیر انتگرال گیری را از تکانه به انرژی تغییر می دهیم. همچنین از معادله 1.135 برای یک ژئودزیک خروجی استفاده کنید (که M را با $M - \omega$) ω تا جایگزین می کنیم) dr/dt شود و انتگرال را تغییر دهید:

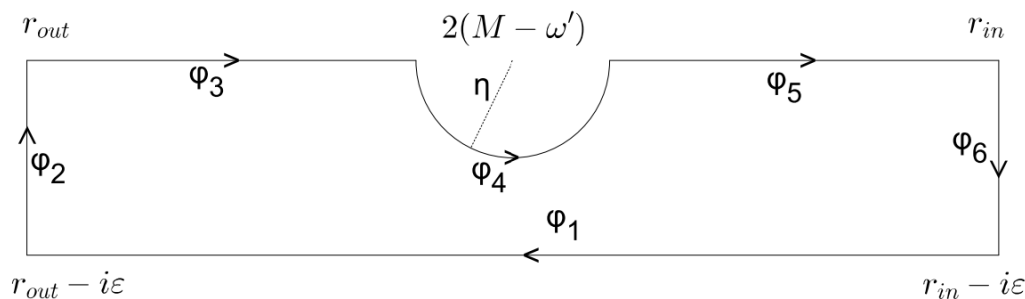
$$\begin{aligned} Im S &= Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} \frac{1}{\frac{dr}{dt}} \frac{dH}{dp'_r} dp'_r dr \\ &= Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_M^{M-\omega} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2M'}{r}}} dM' dr \\ &= -Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^\omega \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} d\omega' dr \end{aligned} \quad (1.137)$$

برای ارزیابی قسمت موهومی این انتگرال، ω' را به $\omega' - i\varepsilon$ تغییر می دهیم، که ε یک عدد مثبت دلخواه کوچک است. علامت منفی عبارت موهومی تضمین می کند که جواب های انرژی مثبت به ترتیب کاهش می یابند. اکنون می توان بخش خیالی انتگرال را با استفاده از روش های تحلیل پیچیده ارزیابی کرد. $\left(1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{z}}\right)^{-1}$ را انتگرال می گیریم:

$$\begin{aligned} Res_{z=2(M-\omega')} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{z}}} &= \frac{1}{\frac{d}{dz} \left(1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{z}}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{z}}} = 4(M-\omega') \end{aligned} \quad (1.138)$$

با توجه به اینکه r_{in} بزرگتر از r_{out} است خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Im S &= -Im \int_0^\omega i\pi 4 (M - \omega') dr = \int_0^\omega \pi 4 (M - \omega') d\omega' \\ &= 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.139)$$



نکته 1.1: مسیر بسته که بر روی ن قسمت موهومی کنش را اندازه گیری میکنیم

یک مسیر بسته همانند تصویر 1.1 در نظر میگیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$Im S = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_M^{M-\omega} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2M'}{r}}} dM' dr \quad (1.140)$$

که انتگرال آن برار است با:

$$Res_{z=\frac{r}{2}} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2z}{r}}} = \frac{1}{\frac{d}{dz} \left(1 - \sqrt{\frac{2z}{r}} \right)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{zr}}} = -r \quad (1.141)$$

$$Im S = -Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} i\pi r dr = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \pi r dr = 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2}\right) \quad (1.142)$$

بنابراین می توانیم ببینیم که $r_{in} = 2M$ و $r_{out} = 2(M - \omega)$ و شرط $r_{in} > r_{out}$ برقرار است. این از نظر فیزیکی به این معنی است که ذره درست خارج از موقعیت افق اولیه ایجاد می شود و سپس به سمت داخل منتشر می شود و درست خارج از موقعیت جدید افق متوقف می شود. یک محاسبه مشابه را می توان برای تونل زنی ذرات انرژی منفی در داخل افق انجام داد. در این حالت، ژئودزیک شعاعی تهی دارای علامت منفی است و کل انرژی فضازمان M به جای $M - \omega$ با $M + \omega$ جایگزین می شود. محاسبه همان نرخ تونل زنی را به دست می دهد. هر دو کانال انرژی مثبت و منفی به تابش سیاهچاله کمک می کنند و دامنه انتشار آنها باید قبل از محاسبه نرخ انتشار کل (مربع دامنه) با هم جمع شوند. در هر صورت، نرخ انتشار Γ در حد WKB با $e^{-2Im S}$ متناسب است:

$$\Gamma \sim e^{-2Im S} \sim e^{-8\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2}\right)} \quad (1.143)$$

توجه داشته باشید که برای یک سیاهچاله شوارتزشیلد با جرم M ، تغییر آنتروپی مربوط به کاهش جرم آن توسط ω برابر است با $\Delta S_{BH} = -8\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2}\right)$ و نرخ گسیل با $e^{\Delta S_{BH}}$ متناسب است. از نظر فیزیک آماری، این نتایج مربوط به تابشی است که توسط یک مجموعه میکروکانونی با آنتروپی $-\Delta S_{BH}$ توصیف می شود. در این راه حل، تابش خروجی دقیقاً مقدار آنتروپی از دست رفته توسط سیاهچاله را با خود می برد. با این حال، اگر از عبارت متناسب با ω^2 صرف نظر کنیم که حضور آن در نتیجه نیاز به بقای انرژی است (دقیقاً طیف حرارتی تابش مربوط به دمای هاوکینگ سیاهچاله شوارتزشیلد، $\frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}$ بدست می آید. ما در بحث پارادوکس اطلاعات سیاهچاله به این نتیجه باز خواهیم گشت. [10])

اکنون به طور خلاصه بحث کنیم که فرض هایی که برای به دست آوردن این نتیجه اعمال کردیم چقدر موجه هستند. حد نیمه کلاسیک را می توان معقول فرض کرد، زیرا وقتی تابش را به افق رویداد ردیابی کنیم، به طور قابل توجهی انتقال به آبی خواهد داشت و دقیقاً در انتقال به آبی بی نهایت می شود. این به ما اجازه می دهد تا تشعشع را به عنوان ذرات نقطه مانند در نظر بگیریم، بنابراین حد نیمه کلاسیک را توجیه می کنیم. فرض فضازمان ساکن ممکن است مشکل ساز به نظر برسد، اما حداقل در مورد $\omega \ll M$ منطقی به نظر می رسد. در هر صورت، همین فرض توسط اشتقاق اولیه هاوکینگ از تشعشعات سیاهچاله وجود دارد. با این حال دو مشکل دیگر

همچنان باقی است. محاسبه به صراحت بر انتخاب سیستم مختصات Gullstrand-Painlev'e متکی است. این موضوع با توجه به اصل کوواریانس عام نسبیت عام مشکوک است. علاوه بر این، فقط ژئودزیک شعاعی تهی در نظر گرفته می شود. می توان تصور کرد که تمام مسیرهای ممکن تونل زنی باید در نظر گرفته شود تا نرخ تونل زنی صحیح به دست آید. در حالی که این سوالات در چارچوب رویکرد Parikh-Wilczek حل نشده باقی می ماند، روشی که بعداً با استفاده از معادله همیلتون-ژاکوبی توسعه یافت، توانسته است نتایج مورد بحث در بالا را بدون تکیه بر یک سیستم مختصات خاص یا مسیر انتشار تکرار کند. همچنین، امکان تعمیم سیاهچاله های غیر ساکن را فراهم می کند. بررسی رویکرد همیلتون-ژاکوبی متأسفانه فراتر از محدوده این تحقیق است. [13], [11], [14]

- [1] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [2] S. Kar and S. Sengupta, *The Raychaudhuri Equations: A Brief Review*, Pramana **69**, 49 (2007).
- [3] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys Rev D **7**, 2333 (1973).
- [4] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [5] S. K. Modak and S. Samanta, *Effective Values of Komar Conserved Quantities and Their Applications*, Int. J. Theor. Phys. **51**, 1416 (2012).
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, and D. I. Kaiser, *Gravitation* (Princeton University Press, Princeton, N.J, 2017).
- [7] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [8] R. M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, Living Rev. Relativ. **4**, 6 (2001).
- [9] W. Israel, *Third Law of Black-Hole Dynamics: A Formulation and Proof*, Phys Rev Lett **57**, 397 (1986).
- [10] M. K. Parikh and F. Wilczek, *Hawking Radiation As Tunneling*, Phys Rev Lett **85**, 5042 (2000).
- [11] M. K. Parikh, *A Secret Tunnel Through The Horizon*, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 2351 (2004).
- [12] P. Kraus and F. Wilczek, *Self-Interaction Correction to Black Hole Radiance*, Nucl. Phys. B **433**, 403 (1995).
- [13] T. Padmanabhan, *Entropy of Horizons, Complex Paths and Quantum Tunneling*, Mod. Phys. Lett. A **19**, 2637 (2004).
- [14] L. Vanzo, G. Acquaviva, and R. Di Criscienzo, *Tunnelling Methods and Hawking's Radiation: Achievements and Prospects*, Class. Quantum Gravity **28**, 183001 (2011).

