



اطلاعات و آنتروپی

نویسنده:

شعرا جعفری تبار

سال تحصیلی:

1399-1400

1.1 آنتروپی شانون و فون-نویمان

1.1.1 آنتروپی شانون

کلود شانون با بررسی ویژگی های کانال های ارتباطی به تعریف خود از آنتروپی رسید. او در مقاله خود در سال 1948 به دو سؤال مهم پاسخ داد، اولین سؤال این بود: چه مقدار اطلاعات اضافی در پیامی که توسط یک کانال ایده آل منتقل می شود وجود دارد؟ مورد دوم اطلاعات اضافی را از دیدگاه متفاوتی در نظر می گیرد: چه مقدار اطلاعات اضافی باید از طریق یک کانال نویزدار منتقل شود تا امکان رمزگشایی دقیق پیام فراهم شود؟ پیگیری این سؤالات، شانون را به فرمول بندی قضیه کدگذاری بدون نویز و قضیه کدگذاری کانال نویز سوق داد. در حالی که بحث در مورد این قضایا فراتر از دامنه این کار است، ما حداقل نشان خواهیم داد که چگونه تجزیه و تحلیل ارتباطات منجر به فرمول آنتروپی شانون می شود.

پیامی را به شکل رشته n کاراکتری در نظر بگیرید که توسط یک کانال بدون نویز ارسال می شود. فرض کنید پیام توسط منبعی تولید می شود که انتخاب می کند کاراکتر x را با احتمال $p(x)$ مستقل از سایر کاراکترهای ارسالی ارسال کند. حال، احتمال اینکه ما یک پیام خاص $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را دریافت کنیم برابر است:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i) \quad (1.1)$$

حال در نظر بگیرید که k کاراکتر t مختلف وجود دارد که می توانیم در پیام بگنجانیم (مفید است فقط یک کد باینری را تصور کنیم که در آن 0 با احتمال p و 1 با احتمال $(1-p)$ گنجانده شده است. اگر n بسیار باشد. بزرگ، به لطف قانون اعداد بزرگ، ممکن است انتظار داشته باشیم که یک رشته معمولی شامل کاراکتر x_i در حدود $np(x_i)$ بار باشد و مقدار رشته هایی که با رشته های معمولی متفاوت هستند ناچیز باشد. تعداد N رشته معمولی ممکن است به عنوان یک جایگشت ساده با تکرار داده می شود

$$N = \frac{n!}{(\prod_{i=1}^k (np(x_i)))!} \quad (1.2)$$

اگر این را به صورت $e^{\ln N}$ بازنویسی کنیم و از این واقعیت استفاده کنیم که هم n و هم همه $np(x_i)$ بسیار بزرگ هستند (هرچقدر هم که احتمالات $p(x_i)$ کوچک باشد، می توانیم n را به اندازه کافی بزرگ برای این کار

پیدا کنیم. درست باشد)، می‌توانیم از فرمول استرلینگ را برای لگاریتم طبیعی فاکتوریل استفاده کنیم و به دست آوریم:

$$\ln N = \ln \left(\prod_{i=1}^k (np(x_i))! \right) \approx -n \sum_{i=1}^k p(x_i) \ln(p(x_i)) \quad (1.3)$$

$$N \approx \exp(p(x_i) \ln(p(x_i))) = \exp(nS) \quad (1.4)$$

آنترپی شانون را تعریف میکنیم: [1]

$$S = - \sum_{i=1}^k p(x_i) \ln(p(x_i)) \quad (1.5)$$

برخلاف شانون، ما از لگاریتم های طبیعی به جای لگاریتم های با پایه 2 استفاده می‌کنیم. این در ترمودینامیک استاندارد رایج تر است. تفاوت فقط در یک ثابت ضرب است.

ملاحظات مطرح شده در بالا پایه های قضیه کانال کدگذاریلدون نویز شانون را تشکیل می‌دهد. برای رمزگشایی پیام بدون ریسک کردن امکان خطای غیر قابل چشم پوشی، اکنون فقط به کدی نیاز داریم که یک کاراکتر منحصر به فرد را به هر رشته معمولی ممکن اختصاص دهد. بنابراین، کد باید حدود 2^{nS} پیام های مختلف را که با احتمال تقریباً مساوی رخ می‌دهند، تشخیص دهد. این به ما این امکان را می‌دهد که یک پیام را به کمی بیشتر از کاراکترهای $nS \log_2 e$ فشرده کنیم. به راحتی میبینیم که $S \log e = 1$ فقط برای توزیع یکنواخت از کاراکترهای $p(x_i), \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ بسیار ساده است. در هر حالت دیگری $nS \log_2 e < n$ و پیام نهایی کوتاهتر است. به این معنا، آنترپی شانون نشان می‌دهد که ما چقدر نسبت به محتوای پیام ناآگاه هستیم، برای بازسازی قابل اعتماد آن به چه مقدار از آن نیاز داریم. البته می‌توان کل استدلال را به روشی رسمی درست کرد و نشان داد که در واقع کارآمدترین راه برای کوتاه کردن پیام است. با این حال، ما فقط آن را دنبال کردیم تا ایده ای در مورد منشاء تعریف آنترپی شانون بدست آوریم. اجازه دهید اکنون دو منبع اطلاعاتی در ارتباط با هم X و Y را در نظر بگیریم که به همان روشی که در بالا معرفی شد، با تعداد کاراکترهای k_x ، k_y و احتمال وقوع کاراکتر $p(y_i)$ و $p(x_i)$ کار می‌کنند. به لطف ارتباط بین منابع، با خواندن پیام تولید شده توسط منبع Y می‌توان اطلاعاتی در مورد پیام تولید شده توسط منبع X کسب کرد. نشان دادن کل n کاراکتر) ما دوباره انتظار داریم

Π بسیار بزرگ باشد (پیام توسط بردارها $\vec{x}$ و $\vec{y}$ می توانیم احتمال شرطی $p(\vec{x}|\vec{y})$ را بیان کنیم که پیام ارسال شده توسط X ، $\vec{x}$ است، زمانی که پیام ارسال شده توسط Y را $\vec{y}$ تعیین کردیم، با استفاده از قضیه بیز [2]: [1]

$$p(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{p(\vec{x}, \vec{y})}{p(\vec{y})} \quad (1.6)$$

در اینجا $p(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$ احتمال پیام مشترک $(\vec{x}, \vec{y})$ است. سمت راست معادله ی 2.6 را بر حسب آنتروپی شانون بازنویسی کرد:

$$p(\vec{x}|\vec{y}) \approx \frac{2^{-nS(X,Y) \log_2 e}}{2^{-nS(Y) \log_2 e}} \quad (1.7)$$

بنابراین منطقی است که آنتروپی شرطی $S(X|Y)$ را تعریف کنیم:

$$p(\vec{x}|\vec{y}) \equiv 2^{-nS(X|Y) \log_2 e} \quad (1.8)$$

با استفاده از معادله ی 2.7 و 2.8 به دست می آوریم:

$$S(X|Y) = S(XY) - S(Y) \quad (1.9)$$

به طور مشابه:

$$S(Y|X) = S(XY) - S(X) \quad (1.10)$$

آنتروپی شرطی $S(X|Y)$ مشخص می کند که چه مدت یک رشته برای تعیین $\vec{x}$ زمانی که $\vec{y}$ شناخته شده است، مورد نیاز است. به این معنا $I(X; Y) = S(X) - S(X|Y)$ نشان دهنده مقدار اطلاعاتی است که در مورد پیام $\vec{x}$ با خواندن پیام $\vec{y}$ به دست می آید. معلوم می شود که این اطلاعات متقارن است:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= S(X) - S(X|Y) = S(X) + S(Y) - S(XY) \\ &= S(Y) - S(Y|X) = I(Y; X) \end{aligned} \quad (1.11)$$

با خواندن پیام $\vec{y}$ فرد همان مقدار اطلاعاتی را در مورد $\vec{x}$ می آموزد که در مورد $\vec{y}$ با خواندن $\vec{x}$ کمیت $I(X; Y)$ اطلاعات متقابل نامیده می شود و سطح همبستگی بین منابع X و Y را کمیت می کند. اگر منابع مستقل باشند،

نباشد، نمی تواند هیچ بینشی در مورد محتوای آن ارائه دهد. $S(X|Y) = S(X)$ و $I(X; Y)$ برابر است. صفر این البته رفتار معقولی است. اگر پیام $\vec{y}$ به پیام $\vec{x}$ وابسته

در نگاه اول، هر گونه ارتباطی بین شانون و آنتروپی ترمودینامیکی ممکن است آشکار نباشد و وجود چنین ارتباطی در واقع توسط برخی نویسندگان مورد تردید قرار گرفته است. به دنبال استدلال ارائه شده در، ما سعی خواهیم کرد نشان دهیم که حتی آنتروپی ترمودینامیکی را می توان به عنوان مرتبط با اطلاعاتی که در مورد سیستم مورد مطالعه داریم در نظر گرفت. یک سیستم ترمودینامیکی را در نظر بگیرید که در آن ما فقط به موقعیت ها و لحظه های ذرات تشکیل دهنده آن علاقه مندیم (بدون در نظر گرفتن سایر درجات آزادی ممکن). حداکثر آنتروپی ترمودینامیکی سیستم با حجمی که در فضای فاز اشغال می کند به دست می آید: [4], [3]

$$S_{max} = \ln \left(\frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi)^n} \right) \quad (1.12)$$

در اینجا $\Delta q \Delta p$ حجم را در فضای فاز و n تعداد درجات آزادی سیستم است. اگر اکنون اطلاعاتی درباره ی هامیلتونی که سیستم ما را توصیف می کند و دمای ترمودینامیکی آن θ را اندازه گیری می کند به دست آوریم، آنتروپی ترمودینامیکی به آنتروپی یک آنسامبل کانونیکی تبدیل میشود:

$$S(p, q) = - \sum_p \rho(p, q) \ln \rho(p, q) \quad (1.13)$$

$$\rho(p, q) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\langle H(p, q) \rangle}{\theta}} \quad (1.14)$$

با Z تابع افزاز و $\langle H(p, q) \rangle$ مقدار میانگین همیلتونی، یعنی انرژی کل سیستم است. جمع بر روی همه ی مومنتوم های سیستم در المان فضای لسا. ما از هر دو تئوری (تعیین همیلتون) و آزمایش (اندازه گیری دما) برای به دست آوردن اطلاعات در مورد سیستم خود استفاده کرده ایم و با این کار آنتروپی سیستم را کاهش داده ایم، که قبل از یادگیری چیزی در مورد آن، باید فرض کنیم که با معادله 2.12 به دست می آید. ممکن است اطلاعاتی را که به دست آورده ایم به صورت آنتروپی کاهش یافته بیان کنیم:

$$I = S_{max} - S(p, q) = \ln \left(\frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi)^n} \right) - \sum_p \left(\ln Z + \ln \left(\frac{\langle H(p, q) \rangle}{\theta} \right) \right) \quad (1.15)$$

به این ترتیب می توان آنتروپی ترمودینامیکی را به گونه ای مرتبط با اطلاعات در نظر گرفت که شبیه آنتروپی شانون است.[4]

1.1.2 آنتروپی شانون

آنتروپی شانون در واقع فقط یک حد کلاسیک از آنتروپی فون نویمان است که در اوایل سال 1927 تصور شد. برای تعریف این آنتروپی، ابتدا باید فرمالیسم ماتریس چگالی را معرفی کنیم. مجموعه ای از n سیستم کوانتومی را در نظر بگیرید که سیستم i با یک کت $|\psi_i\rangle$ توصیف می شود. احتمال یافتن حالت $|\psi_i\rangle$ را با p_i ، با نرمالیزاسیون $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ نشان دهیم. چنین مجموعه ای حالت میکس نامیده می شود و ماتریس چگالی ρ آن را تعریف می کنیم: [2]

$$\rho \equiv \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (1.16)$$

تعدادی از خصوصیات ماتریس چگالی را میتوان به سادگی ثابت کرد:

1. $Tr \rho = 1$
2. $0 \leq Tr \rho^2 \leq 1$ و $Tr \rho^2 = 1$ تنها برای حالت خالص (حالتی که تنها با یک کت $|\psi\rangle$ توصیف میشود و ماتریس چگالی آن $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$)
3. $\rho^\dagger = \rho$
4. همه ی ویژه مقدار های ρ غیرمنفی هستند.
5. مقدار انتظار ناظر A ، $\langle A \rangle = \sum_{i=1}^n p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$ که میتوان آن را توسط $\langle A \rangle = Tr(A\rho)$ به دست آورد.

با استفاده از خاصیت 2 تریس ρ^2 را می توان به عنوان معیاری برای میزان میکس بودن یک حالت در نظر گرفت که مقدار 1 مربوط به حالت خالص و 0 به حالت حداکثر میکس است. اکنون عناصر یک ماتریس چگالی را به دست می آوریم. برای عناصر روی قطر ρ_{ii} داریم $\{|\phi_i\rangle\}$ پایه های فضای هیلبرت است که با آن کار می کنیم: [5]

$$\rho_{ii} = \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^n p_j \langle \phi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^n p_j |\langle \phi_i | \psi_j \rangle|^2 \quad (1.17)$$

بنابراین، عناصر ρ_{ii} صرفاً احتمال یافتن سیستم در حالت $|\phi_i\rangle$ هستند. عناصر غیر قطری ρ_{ik} $\sum_{j=1}^n p_j \langle \phi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \phi_k \rangle$ را همیشه می توان با انتخاب پایه ی مناسب برابر صفر قرار داد.

برای یافتن تکامل زمانی یک ماتریس چگالی و مزدوج مختلط آن را، با استفاده از معادله شرودینگر $i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$ (H همیلتونی یک سیستم است) نسبت به زمان مشتق میگیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi| \right) = \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{1}{i} H |\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi| \frac{1}{i} H \right) \\ i \frac{\partial}{\partial t} \rho &= [H, \rho] \end{aligned} \quad (1.18)$$

که در آن $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ است. معادله 2.18 نوع کوانتومی معادله کلاسیک لیویل است، تفاوت آن فقط در حضور $\hbar$ (و ثابت پلانک که آن را برابر یک قرار داده ایم) و جابه جایی به جای براکت پواسون است.

اکنون توجه خود را به ماتریس های چگالی حالت های دوبخشی معطوف خواهیم کرد. حالت خالص AB را در نظر بگیرید که با یک کت $|\psi\rangle$ توصیف شده است. اگر AB حالت را به وسیله ی حالت A را در پایه ی $\{|\phi_{Bj}\rangle\}$ بنویسیم. به طور معمول حالت A نشان دهنده یک سیستم کوانتومی است که ما مطالعه می کنیم و حالت B محیط را نشان می دهد. ماتریس چگالی ρ_{AB} حالت AB را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}^* |\phi_{Ai} \phi_{Bj}\rangle\langle\phi_{Ak} \phi_{Bl}| \quad (1.19)$$

در اینجا α_{ij} اعداد مختلط هستند و $|\psi\rangle = \sum_{ij} \alpha_{ij} |\phi_{Ai} \phi_{Bj}\rangle$. اگر بخواهیم ماتریس های چگالی ρ_B ، ρ_A را به دست بیاوریم، این کار را با تریس گرفتن بخشی از ρ_{AB} انجام دهیم.

$$\begin{aligned} \rho_A = Tr_B \rho_{AB} &= \sum_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}^* \langle\phi_{Bm} | \phi_{Ai} \phi_{Bj}\rangle \langle\phi_{Ak} \phi_{Bl} | \phi_{Bm}\rangle \\ &= \sum_{ik} |\phi_{Ai}\rangle\langle\phi_{Ak}| \sum_j \alpha_{ij} \alpha_{kj}^* \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\rho_B = Tr_A \rho_{AB} = \sum_{jl} |\phi_{Bj}\rangle\langle\phi_{Bl}| \sum_i \alpha_{ij} \alpha_{il}^* \quad (1.21)$$

با استفاده از تجزیه ی اشمیت میتوانیم پایه های $\{|\phi'_{Ai}\rangle\}$ و $\{|\phi'_{Bj}\rangle\}$ را به دست بیاوریم به گونه ای که: [2]

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} \sqrt{p_i} |\phi'_{Ai}\phi'_{Bj}\rangle \quad (1.22)$$

ماتریس های چگالی قطری شده ρ_A و ρ_B برابر است با:

$$\rho_A = \sum_{ijkl} p_i |\phi'_{Ai}\rangle \langle \phi'_{Ai}| \quad (1.23)$$

$$\rho_B = \sum_{ijkl} p_i |\phi'_{Bi}\rangle \langle \phi'_{Bi}| \quad (1.24)$$

بنابراین ویژه مقادیر هر دو ماتریس چگالی برابر هستند.

1.1.3 آنتروپی فون نویمان

اکنون می‌توانیم از ماتریس چگالی برای تعریف آنتروپی یک حالت کوانتومی استفاده کنیم:

$$S = -Tr(\rho \ln \rho) \quad (1.25)$$

این فرمول آنتروپی است که توسط جان فون نویمان پیشنهاد شده است. اگر پایه ی متعامد $\{|\phi_i\rangle\}$ را انتخاب کنیم که ρ در آن قطری است با استفاده از بسط تیلور برای لگاریتم به دست می‌آوریم: [6]

$$S = - \sum_j \langle \phi_j | \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i | \ln(p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i |) | \phi_j \rangle \quad (1.26)$$

$$= - \sum_j \sum_i p_i \delta_{ij} \left\langle \phi_i \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (p_i)^k (|\phi_i\rangle \langle \phi_i|)^k \right| \phi_j \right\rangle \quad (1.27)$$

$$= - \sum_j \sum_i p_i \delta_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (p_i)^k \delta_{ij} = - \sum_j p_j \ln p_j \quad (1.28)$$

آخرین عبارت همان آنتروپی شانون است، که حد آنتروپی فون نویمان برای یک پایه ی ارتونرمال است که ρ را قطری می‌کند. در این حالت، همه حالت‌های $|\phi_i\rangle$ را می‌توان از هم تشخیص داد و سیستم مانند یک آنسامبل کلاسیک با احتمال p_i برای هر $|\phi_i\rangle$ رفتار می‌کند. به عبارت دیگر در هم تنیدگی آنها از بین می‌روند. اجازه دهید اکنون برخی از مهم ترین ویژگی های آنتروپی فون نویمان را فهرست کنیم [2]:

1. آنتروپی یک حالت خالص برابر صفر است
2. آنتروپی تحت عمل همگر یکانی بر روی پایه ها تغییر نمی‌کند $S(\rho) = S(U\rho U^{-1})$
3. برای هر ρ که d تا ویژه مقدار دارد، ماکسیمم آنتروپی برابر است با $\ln d$ که تنها در صورتی به دست می‌آید که همه مقادیر ویژه برابر باشند. این مشابه آنتروپی شانون است که با توزیع یکنواخت به حداکثر مقدارش می‌رسد.
4. برای هر $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ و $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ و $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ داریم $S(\sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i S(\rho_i)$. از نظر فیزیکی، به این معنی است که هرچقدر اطلاعات کمتری در مورد ماتریس چگالی حالت داشته باشیم (نمی‌دانیم که ترکیب خطی ماتریس ρ_i است)، آنتروپی بیشتر است.
5. برای حالت AB ، $S(AB) \leq S(A) + S(B)$ و دو طرف مساوی هستند تنها زمانی که $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$

6. برای حالت دوتایی خالص کاملاً جدا از هم AB ، $S(A) = S(B)$ از آنجایی که هر دو ماتریس چگالی دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند (معادلات 1.23، 1.24)

7. با استفاده از حالت کلاسیکی اطلاعات متقابل را به صورت $I(A; B) = S(A) + S(B) - S(AB)$ تعریف میکنیم. $I(A; B) \geq 0$ و تنها زمانی برابر صفر هست که برای دو حالت جدا از هم تعریف شده باشد (خاصیت 6)

8. رابطه ی مثلثاتی در آنتروپی $|S(A) - S(B)| \leq S(AB)$ برای مشاهده ی آن، یک حالت خالص ABC را در نظر بگیرید. با استفاده از خاصیت 6، $S(A) = S(BC)$ و $S(C) = S(AB)$ و با استفاده از خاصیت 5، $S(A) \leq S(B) + S(C) = S(B) + S(AB)$. به همین دلیل $S(AB) = S(A) - S(B)$ و با عوض کردن جای A و B در آرگومان، نامساوی بالا را به دست می آوریم

9. $I(A; BC) \geq I(A; B)$. اثبات این نابرابری نسبتاً پیچیده است. اما یک استدلال ساده و معقول این است که همبستگی بین سیستم A و سیستم ترکیبی BC حداقل به اندازه همبستگی بین A و B قوی است.

در حالی که بسیاری از این ویژگی ها با آنتروپی شانون و فون نویمان مشترک هستند، نابرابری مثلث $|S(A) - S(B)| \leq S(AB)$ در آنتروپی فون نویمان بسیار ضعیف تر از نابرابری های $S(AB) \geq S(A)$ و $S(AB) \geq S(B)$ برای آنتروپی شانون است. آنتروپی شانون یک سیستم میکس همیشه بزرگتر یا مساوی با آنتروپی هر یک از زیرسیستم های آن است. چنین خاصیتی برای آنتروپی فون نویمان وجود ندارد. به عنوان مثال، یک حالت خالص AB را در نظر بگیرید که به دو حالت درهم تنیده A ، B تقسیم شده است. سپس $S(AB) = 0$ اما $S(A) = S(B) > 0$. توضیح این در درهم تنیدگی کوانتومی نهفته است، یک پدیده بدون هیچ مشابه کلاسیک، که یعنی هنگامی که کل سیستم AB را اندازه گیری می کنیم، می توانیم حداکثر مقدار اطلاعات مجاز توسط قوانین مکانیک کوانتومی را بدست آوریم. بنابراین، آنتروپی AB حداقل مقدار آن، صفر است. با این حال، اگر به عنوان مثال فقط سیستم A را اندازه گیری کنیم، نمی توانیم به اطلاعات موجود در همبستگی های بین سیستم های A و B دسترسی پیدا کنیم. این اطلاعات با اندازه گیری A و B به طور جداگانه غیرقابل دسترسی است و تنها با بررسی کل سیستم AB قابل دستیابی است. [2]

1.2 تفسیر آنتروپی سیاه چاله

وقتی جرم سیاهچاله افزایش می یابد، دمای آن کمتر می شود. بنابراین، سیاهچاله ها ظرفیت گرمایی منفی دارند که مانع از دستیابی آنها به تعادل ترمودینامیکی با یک حمام حرارتی بی نهایت می شود. بنابراین، اگر بخواهیم آنتروپی سیاهچاله را تفسیر فیزیکی کنیم، به مفهوم عدم تعادل آنتروپی نیاز داریم. به نظر می رسد آنتروپی اطلاعات، یا فون نویمان یا شانون در زمینه کلاسیک، انتخابی منطقی است زیرا برای تعریف آن نیازی به مفهوم تعادل نیست. ایده درک آنتروپی سیاهچاله به عنوان آنتروپی شانون به مقاله اصلی بکنشتاین برمی گردد. این تحقیق شامل چندین نمونه مدل است که نشان می دهد تغییر مجموع آنتروپی سیاهچاله و آنتروپی شانون ماده خارج از سیاهچاله، قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته را برآورده می کند. با یک مثال شامل یک نوسانگر هارمونیک شروع میکنیم. [7]

اجازه دهید یک نوسانگر هارمونیک خطی غیر نسبیتی را در نظر بگیریم که از دو توپ با جرم سکون مساوی $\frac{m}{2}$ ساخته شده است که توسط یک فنر تقریباً بدون جرم به هم متصل شده اند. فرکانس نوسانات را با ω نشان خواهیم داد. این نوسانگر در یک جعبه کروی قرار دارد که در دمای ثابت θ نگهداری می شود. هامیلتونی چنین نوسانگر هارمونیکی به صورت زیر است:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2(\Delta y)^2 \quad (1.29)$$

که Δy اختلاف فاصله بین توپ ها از مقدار میانگین آن است. توزیع حرارتی حالات انرژی آن فرض شده است، با احتمال پیدا کردن نوسانگر در حالت- n ام آن برابر است با:

$$p_n = \frac{1 - e^{-\frac{\omega}{\theta}}}{1 - e^{-\frac{N\omega}{\theta}}} e^{\frac{\omega}{\theta}} e^{-\frac{n\omega}{\theta}} \quad (1.30)$$

اکنون آنتروپی شانون سیستم را محاسبه می کنیم. با جایگزینی معادله 1.30 در معادله ی شانون 1.5، به راحتی می توانیم به دست آوریم:

$$S = \frac{\omega}{\theta} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1} - \ln(1 - e^{-\frac{\omega}{\theta}}) \quad (1.31)$$

میانگین انرژی نوسانات برابر است با:

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^N p_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega = \left(\frac{1}{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (1.32)$$

برای آزمایش قانون دوم تعمیم یافته، می‌خواهیم آنتروپی سیستمی که در سیاه‌چاله می‌افتد برای میانگین انرژی داده شده حداکثر باشد. می‌توانیم از استدلال ساده زیر استفاده کنیم تا ببینیم که توزیع حرارتی واقعاً این شرط را برآورده می‌کند. اگر بخواهیم توزیع احتمال را از $\{p_n\}$ به $\{p_n + \delta_n\}$ کمی تغییر دهیم، یک شرط مرزی برای نرمال کردن احتمال کل به یک داریم:

$$\sum_{n=1}^N \delta_n = 0 \quad (1.33)$$

اگر بخواهیم انرژی میانگین را هم ثابت نگه داریم، شرط مرزی دیگری داریم:

$$\sum_{n=1}^N n \delta_n = 0 \quad (1.34)$$

با استفاده از این شرایط می‌توانیم تغییر آنتروپی را تعیین کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta S &= - \sum_{n=1}^N (p_n + \delta_n) \ln(p_n + \delta_n) + \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n \quad (1.35) \\ &= - \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n - \sum_{n=1}^N \delta_n \ln p_n - \sum_{n=1}^N p_n \frac{\delta_n}{p_n} \\ &\quad + O(\delta_n^2) + \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n = - \sum_{n=1}^N \delta_n \ln p_n + O(\delta_n^2) \end{aligned}$$

برای توزیع گرمایی داریم:

$$\begin{aligned}\Delta S_T &= - \sum_{n=1}^N \delta_n \ln \left(\left(1 - e^{-\frac{\omega}{\theta}} \right) e^{-\frac{n\omega}{\theta}} \right) + o(\delta_n^2) \\ &= \frac{\omega}{\theta} \sum_{n=1}^N \delta_n n - \ln \left(1 - e^{-\frac{\omega}{\theta}} \right) \sum_{n=1}^N \delta_n + o(\delta_n^2) = o(\delta_n^2)\end{aligned}\quad (1.36)$$

ما نشان دادیم که اگر توزیع احتمال را کمی تغییر دهیم، آنتروپی تقریباً ثابت می ماند. همانطور که در بخش 1.2.2 ذکر شد، برای یک جعبه کروی با شعاع b غیر صفر و جرم μ که در یک سیاهچاله سقوط می کند، حداقل افزایش مساحت افق برابر است با [7]

$$\Delta \alpha_{min} = 2\mu b \quad (1.37)$$

بنابراین برای محاسبه حداقل افزایش آنتروپی سیاهچاله، حداقل شعاع b جعبه باید تعیین شود که حداقل نصف مقدار میانگین فاصله بین توپ ها است. مقدار میانگین باید بزرگتر از نوسانات حرارتی فاصله Δy باشد. با استفاده از قضیه ویرال و معادله 1.29 به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} m \omega^2 (\Delta y)^2 &= \frac{1}{2} \langle E \rangle \\ (\Delta y)^2 &= \frac{4}{m \omega^2} \langle E \rangle\end{aligned}\quad (1.38)$$

بنابراین

$$b \geq \frac{1}{\sqrt{m \omega}} \sqrt{\langle E \rangle} \quad (1.39)$$

از آنجا که $\mu \geq m + \langle E \rangle$ آنتروپی سیاه چاله افزایش پیدا میکند:

$$S_{BH} = \frac{A}{4} = 2\pi\mu b \geq 2\pi(m + \langle E \rangle) \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \sqrt{\langle E \rangle} \quad (1.40)$$

اگر از آنتروپی تابش جسم سیاه در داخل جعبه صرف نظر کنیم (فرضی منطقی برای دماهای پایین) می‌توانیم عبارت سمت چپ قانون دوم تعمیم‌یافته را بنویسیم:

$$\Delta(S_{BH} + S_C) = 2\pi(m + \langle E \rangle) \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \sqrt{\langle E \rangle} - \frac{\omega}{\theta} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1} + \ln(1 - e^{-\frac{\omega}{\theta}}) \quad (1.41)$$

و حداقل آن را نسبت به $\frac{\omega}{\theta}$ برای $\frac{\omega}{\theta} = 2\pi(m(\langle E \rangle^{-1} + 1)\sqrt{m^{-1}(\langle E \rangle)})$ بیابید. حداقل تغییر در آنتروپی برابر است با:

$$\Delta(S_{BH} + S_C)_{min} = (\frac{\omega}{\theta})_{min} + \ln(1 - e^{-(\frac{\omega}{\theta})_{min}}) \quad (1.42)$$

شرط نوسانگر غیر نسبیتی نتیجه ی $\langle E \rangle \gg m$ را به ما می‌دهد. بنابراین، $(\frac{\omega}{\theta})_{min} \gg 2\pi$ و $\Delta(S_{BH} + S_C)_{min} > 0$ در نتیجه، شرایط گفته شده در قانون دوم تعمیم یافته صدق میکنند. البته این کار قانون دوم تعمیم یافته را ثابت نمی‌کند. با این حال، از آنجایی که هنوز یک اثبات کلی ارائه نشده است، این مثال برای ما مهم است و نشان می‌دهد که قرار دادن آنتروپی شانون (یا به طور کلی تر، فون نویمان) در قانون دوم تعمیم یافته همراه با آنتروپی سیاهچاله نتایج معقولی به همراه دارد. مشکل اساسی شناسایی درجات آزادی است که آنتروپی سیاهچاله را به وجود می‌آورند. تلاش‌های متعددی در زمینه نظریه‌های گرانش کوانتومی وجود دارد که برخی از آنها به اختصار در مقدمه ذکر شد.

علاوه بر گرانش کوانتومی، تلاش‌هایی برای توصیف آنتروپی سیاهچاله به عنوان آنتروپی درهم تنیدگی ناشی از درهم تنیدگی‌های کوانتومی بین بیرونی و درونی سیاهچاله وجود دارد. درون و بیرون سیاهچاله با هم یک حالت خالص را تشکیل می‌دهند، اما هر کدام به طور جداگانه در یک حالت میکس هستند (این مسئله در پایان 1.1.3 مورد بحث قرار گرفته است). سپس می‌توان نشان داد که آنتروپی واقعاً متناسب با مساحت افق است. نه تنها در یک سیاهچاله، بلکه هر کره خیالی که در یک فضا-زمان با میدان کوانتومی بدون جرم آزاد قرار دارد را در نظر بگیریم، می‌توانیم این نتیجه را بدست آوریم. اگر اندازه‌گیری‌های خود را فقط به بیرون کره یا

فقط به داخل آن محدود کنیم، آنتروپی متناسب با مساحت کره بدست می آوریم (اگر کل سیستم در حالت خالص باشد، آنتروپی در خارج برابر است با آنتروپی در داخل). یکی از مشکلات این روش در ثابت تناسب نهفته است: آن را به عنوان مربع طول موج قطع فرابنفش ضرب در مقداری ثابت عددی داده می شود. اگر طول موج قطع ماوراء بنفش در مقداری ثابت عددی ضرب شود. اگر فرکانس قطع اشعه ماوراء بنفش از مرتبه جرم پلانک $M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ انتخاب شود و یک عامل عددی مناسب انتخاب شود، در واقع فرمول آنتروپی سیاهچاله را در واحدهای استاندارد بدست می آوریم. با این حال، هیچ راه شناخته شده ای برای تعیین ضریب عددی وجود ندارد.

رویکرد دیگر آنتروپی سیاهچاله را به جو حرارتی آن نسبت می دهد. می توانیم آن را به عنوان یک میدان کوانتومی بدون جرم آزاد در خارج از افق رویداد تصور کنیم. در یک برآورد تقریبی، آنتروپی چنین میدانی با θ^3 متناسب است. با این حال، این دما البته به صورت محلی توسط ناظری که با جو حرکت می کند اندازه گیری می شود، در حالی که دمای هاوکینگ $\frac{k}{2\pi}$ توسط ناظری در بی نهایت اندازه گیری می شود. ضریب تبدیل V^{-1} با $V = \sqrt{l_\rho l^\rho}$ است (l^ρ یک بردار کیلینگ است که با معادله 1.11 تعریف شده است). از آنجایی که بردار l^ρ در افق صفر می شود، دمای اندازه گیری شده محلی با نزدیک شدن به آن واگرا می شود. به عبارت دیگر، با بی نهایت شدن انتقال سرخ در افق، فرکانس اندازه گیری شده به صورت محلی می تواند به طور دلخواه بالا باشد و تعداد حالت های دلخواه زیادی وجود دارد. این مشکل را می توان با فرکانس قطع فرابنفش از مرتبه جرم پلانک برطرف کرد و همان نتیجه ای را برای آنتروپی به دست می آوریم که در درهم تنیدگی قبلاً مورد بحث قرار گرفت. می توان نشان داد که بیشتر آنتروپی کل در پوسته ای در اطراف افق است که ضخامت آن در حد طول پلانک است. از آنجایی که اتمسفر خارج از سیاهچاله در حالت حرارتی است، حتی می توانیم آنتروپی فون نویمان آن را به عنوان آنتروپی ترمودینامیکی استاندارد تفسیر کنیم. این کار هم همان مشکلات درهم تنیدگی را دارد: فرکانس قطع و ضریب عددی در فرمول آنتروپی قابل ارزیابی نیستند و فقط میتوان حدس می زنند تا نتیجه صحیح را به دست آورد. [8], [9]

در هر دو تصویر درهم تنیدگی و جو حرارتی، آنها با درجات آزادی استاندارد میدان های کوانتومی درست خارج از سیاهچاله مرتبط هستند. در رویکرد گرانش کوانتومی حلقه ای، درجات آزادی مستقیماً در افق قرار دارند. [9]

مشکل تفسیر آنتروپی سیاهچاله حل نشده باقی مانده است. این بخش فقط شامل یک بحث بسیار مختصر از چند رویکرد منتخب است که در حال بررسی هستند و بررسی کامل این مبحث نیست.

1.3 پارادوکس اطلاعات سیاه چاله

به راحتی می توان تصور کرد که ماده ای که سیاهچاله را تشکیل می دهد در ابتدا با ماده ای که خارج از سیاهچاله باقی می ماند درهم تنیده است. سپس داخل و خارج سیاهچاله با هم در حالت کوانتومی خالص قرار می گیرند، در حالی که هر یک به طور جداگانه در حالت میکس هستند. اکنون تشکیل یک سیاهچاله ایزوله را در نظر بگیرید که سپس با فرآیند تابش هاوکینگ به طور کامل تبخیر می شود. آیا همبستگی های کوانتومی در طول تبخیر بازسازی می شوند؟ اگر پاسخ منفی است، پس فضا زمان اصلی بدون سیاهچاله ها که ماده آن در حالت خالص بوده، به فضامانی تبدیل می شود که حاوی سیاهچاله نیست، اما اکنون ماده در آن در حالت مخلوط است. بنابراین، تکامل یک سیستم منزوی که ما در نظر گرفتیم غیر واحد بود، که با قوانین شناخته شده فیزیک کوانتومی در تضاد است. از نظر اطلاعات، ما با یک حالت خالص شروع کردیم که آنتروپی فون نویمان صفر بود، یعنی حداکثر اطلاعات ممکن را در مورد آن داشتیم و در نهایت حالتی با آنتروپی S مثبت داریم. بنابراین مقدار $\Delta I = -S$ از اطلاعات را از دست دادیم. با این حال، آنتروپی یک سیستم ایزوله در طول تکامل آن تغییر نمی کند. ما می توانیم این نتیجه را از آنالوگ کوانتومی قضیه لیوویل (معادله 1.18) بدست آوریم. بنابراین، از دست دادن اطلاعات با قوانین شناخته شده فیزیک کوانتومی در تضاد است. از آنجایی که به دست آوردن قضیه لیوویل تکامل را یکانی را فرض می کند، این در واقع دوباره نتیجه از دست دادن یکانی بودن است. به این دلیل، احتمال از دست رفتن اطلاعات در طول تبخیر سیاهچاله به عنوان پارادوکس اطلاعات سیاهچاله شناخته می شود.

اگر فرض کنیم که یک سیاهچاله دقیقاً با طیف حرارتی مربوط به دمای هاوکینگ $\frac{k}{2\pi}$ تا لحظه تبخیر کامل تابش می کند، در واقع همبستگی های کوانتومی از بین خواهند رفت. فرض طیف حرارتی ناشی از نادیده گرفتن عبارت متناسب با مجذور انرژی تابشی ω در کنش موهومی است که نرخ تونل زنی متناسب با $e^{-8\pi M\omega}$ را ایجاد می کند. سپس تابش خروجی را می توان توسط یک مجموعه میکرو متعارف با آنتروپی $8\pi M\omega$ توصیف کرد. کاهش آنتروپی سیاهچاله برابر $\Delta S_{BH} = -8\pi\omega(M - \frac{\omega}{2})$ است. بنابراین، تابش اطلاعات کمتری نسبت به اطلاعات از دست رفته از سیاهچاله حمل می کند، که تفاوت آن $\Delta I = -4\pi\omega^2$ است، می بینیم که اگر سیاهچاله به این روش کاملاً تبخیر شود، از دست دادن اطلاعات (معادل از دست دادن خاصیت) رخ می دهد.

بسیاری از راه حل های ممکن برای این پارادوکس پیشنهاد شده است. از جمله این ایده این است که سیاهچاله نباید به طور کامل تبخیر شود و تمام اطلاعات از دست رفته در مقداری باقیمانده ذخیره می شود، یا اینکه مراحل پایانی تبخیر دیگر حرارتی نیست و اجازه می دهد تا قبل از ناپدید شدن کامل سیاهچاله، در هم تنیدگی ها را بازیابی کنند. رویکرد دیگر این است که پیشنهاد کنیم که واقعاً در نظریه کامل گرانش کوانتومی از دست دادن اطلاعات رخ می دهد. [10]

راه حل نیمه کلاسیک تابش هاوکینگ در واقع امکان حل پارادوکس اطلاعات را نیز ارائه می دهد. هنگامی که بقای انرژی در طول فرآیند تبخیر اعمال می شود و از عبارت از مرتبه ω^2 صرف نظر نمی شود، آنتروپی تابش دقیقاً برابر با کاهش آنتروپی سیاهچاله است و هیچ گونه از دست دادن اطلاعات رخ نمی دهد.

1.4 مرزهای آنتروپی

در فرآیند Geroch جعبه ای حاوی مقداری ماده در سیاهچاله رها می شود. اگر بتوان جعبه را به طور دلخواه نزدیک به افق رویداد پایین آورد، قبل از اینکه رها شود، هیچ افزایشی در ناحیه افق رخ نمی دهد، آنتروپی سیاهچاله بدون تغییر باقی می ماند و آنتروپی جعبه ناپدید می شود. این نه تنها قانون دوم ترمودینامیک را نقض می کند، بلکه حتی قانون دوم تعمیم یافته بکنشتاین را نیز زیر پا می گذارد. پاسخ بکنشتاین به این موضوع این بود که ابعاد جعبه نمی تواند به طور دلخواه کوچک باشد و بنابراین محدودیتی در مورد نزدیک شدن به افق رویداد وجود دارد. او در مقاله اصلی خود این رویکرد را به طور خاص برای جعبه حاوی تابش جسم سیاه اعمال کرد و نشان داد که قانون دوم تعمیم یافته در این مورد درست باقی می ماند. بعداً او یک مرز جهانی برای اندازه یک سیستم با آنتروپی S و انرژی کل پیشنهاد کرد، و بیان کرد: [11]

$$\frac{S}{E} \leq 2\pi R \quad (1.43)$$

که در آن R بعد مشخصه سیستم است (در ساده ترین حالت یک کره شعاع آن). به راحتی می توان فهمید که این مرز به طور مؤثر بیان می کند که سیستمی که انرژی کل آن E است نمی تواند آنتروپی بیشتر از یک سیاهچاله شوارتزشیلد با همان انرژی داشته باشد. بعداً یک مرز آنتروپی جایگزین پیشنهاد شد: [9]

$$S \leq \frac{A}{4} \quad (1.44)$$

با A مساحت مرز سیستم است.

این سوال که آیا مقداری مرز آنتروپی وجود دارد یا خیر هنوز بی پاسخ است. همچنین ناشناخته است که آیا چنین مرزی برای اعتبار قانون دوم تعمیم یافته ترمودینامیک ضروری است یا خیر، زیرا راه حل های جایگزینی برای مشکل فرآیند Geroch پیشنهاد شده است.

1.5 تحولات احتمالی

هدف از این بخش، معرفی مختصر دو ایده باز است که امیدواریم در آینده به بررسی آنها بپردازیم. تا کنون، این ایده ها دنبال نشده اند و بنابراین طرح کلی ارائه شده در اینجا بسیار اساسی است.

آنتروپی و پایداری

ایده اول شامل بررسی ارتباطات احتمالی بین آنتروپی و پایداری یک سیاهچاله است. برای جرم معین M و شعاع R افق رویداد، یک سیاهچاله باردادار (با بار Q) کروی متقارن (Reissner-Nordstorm) دارای کمترین آنتروپی در بین تمام سیاهچاله های کر-نیومن است، یعنی $S = \pi(2MR - Q^2)$ ، و به طور کلی، سیاهچاله با بار بیشتر، آنتروپی کمتری دارد (برای M, R ثابت). در عین حال، باور داریم که تشکیل سیاهچاله های باردادار بسیار دشوار است زیرا نیروهای دافعه بین بارهای یک علامت علیه نیروهای گرانشی جذاب کار می کنند. علاوه بر این، برای یک جرم معین M ، یک سیاهچاله ی اضطراری کمترین آنتروپی ممکن را دارد، $S = \pi M^2$ ، و تغییر یک سیاهچاله معمولی به یک سیاهچاله ی بیرونی به صراحت توسط قانون سوم ممنوع است. از آنجایی که در زمینه ترمودینامیک استاندارد، اصل حداکثر آنتروپی مفهومی بسیار قدرتمند است، شاید جالب باشد که از این منظر به سیاهچاله های باردادار و افراطی نگاه کنیم.

تعامل ترمودینامیک بین سیاهچاله و ماده

ایده این بخش این است که به برهمکنش بین یک سیاهچاله و ماده اطراف، مثلاً یک دیسک برافزایش، از منظر دو سیستم ترمودینامیکی که انرژی را مبادله می کنند، نگاه کنیم. اگر هیچ چیز دیگری نباشد، این ممکن است برای کشف مفهوم ظرفیت گرمایی منفی سیاهچاله ها جالب باشد. یکی از مشکلاتی که به راحتی قابل پیش بینی است، انرژی سیاهچاله است. از آنجایی که ماهیت گرانشی دارد، هیچ تعریف محلی ثابتی از آن وجود ندارد. با این حال، سعی میکنیم با یک تعریف دیگر از انرژی گرانشی محلی این موضوع را حل کنیم.

- [1] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, 55 (n.d.).
- [2] J. Preskill. Quantum shannon theory,
<http://theory.caltech.edu/~preskill/ph229/>.
- [3] C. Wuthrich, *Are Black Holes about Information?*, ArXiv170805631 Gr-Qc Physicsphysics (2017).
- [4] C. Adami, *The Physics of Information*, ArXivquant-Ph0405005 (2004).
- [5] A. Bertlmann. *Quantum mechanics (course notes, theoretical physics T2)*, (2008)
- [6] J. von Neumann, *Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten*, Nachrichten Von Ges. Wiss. Zu Gött. Math.-Phys. Kl. **1927**, 273 (1927).
- [7] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys Rev D **7**, 2333 (1973).
- [8] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, 1st edition (Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2007).
- [9] R. M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, Living Rev. Relativ. **4**, 6 (2001).
- [10] M. K. Parikh and F. Wilczek, *Hawking Radiation As Tunneling*, Phys Rev Lett **85**, 5042 (2000).
- [11] J. D. Bekenstein, *Universal Upper Bound on the Entropy-to-Energy Ratio for Bounded Systems*, Phys Rev D **23**, 287 (1981).

