



تقارن یک ذره ی نقطه ای

نویسنده:

شعرا جعفری تبار

سال تحصیلی:

1398-1399

زمانی که ما تکانه زاویه ای کل یک ذره را در مکانیک کوانتومی بررسی می کنیم، نه تنها تکانه زاویه ای مداری (همانند مکانیک کلاسیک) بلکه تکانه زاویه ای داخلی ذره را نیز مطالعه کنیم که ما آن را اسپین می نامیم و تعیین می کند که ذره در کدام حالت قرار دارد. اسپین کمیتی بقادر است و بنابراین مطالعه آن، به عنوان مثال در برخورد دهنده ی ذرات، از اهمیت زیادی برخوردار است. در این پروژه، ما سعی می کنیم با مطالعه همتهای کلاسیک اسپین، درک بهتری از آن در مکانیکی کوانتومی داشته باشیم. این کار را با استفاده از تقارن انجام می دهیم.

برای شروع بحث تقارن از یک ذره ی کلاسیک شروع میکنیم. اگر یک کمیت تحت یک تغییر متقارن باشد، این مقدار تحت این تبدیل ثابت میماند، یعنی قبل و بعد از این تغییر یکسان است. در فیزیک ما به تقارن معادلات حرکت علاقه داریم. دو دسته اصلی تقارن وجود دارد. تقارن های فضا زمان، مانند خیز، چرخش و انتقال در فضا زمان، و تقارن های درونی مانند تبدیلات پیمانه ای در الکترومغناطیس. به عنوان مثال، در نظر بگیرید که یک سیستم فیزیکی دارای تقارن انتقال زمانی است. این بدان معناست که انجام آزمایش قبل یا بعد از انتقال زمان باید نتیجه یکسانی دارد. از نظر ریاضی، این امر منجر به بقای معادلات حرکت یا کنش تحت تغییر شکل ریاضی می شود.

با مطالعه ی کنش یک سیستم می توان معادلات حرکت مربوط به این سیستم را پیدا کرد. بنابراین، ما از کنش یک سیستم آغاز میکنیم و انتقالاتی را مشاهده می کنیم که تحت آنها کنش ثابت است. از طریق تقارن ها، کمیتی را توصیف می کنیم که در نظریه میدان کلاسیک اسپین را توصیف می کند و کنش یک ذره ی در حال چرخش را به دست می آوریم که به محض کمی شدن دارای اسپین است. ما با فشردن یک بعد ریسمان و یک بعد تعبیه شده، یک عمل برای ذرات در حال چرخش پیدا می کنیم. ما ریسمان را با اسپین صحیح را در نظر می گیریم، یعنی ریسمان های بوزونیک، و بنابراین ما فقط کنش را برای ذرات اسپین صحیح، پیدا می کنیم. به طور کلی، برای بررسی اینکه آیا یک مقدار اسپین را توصیف می کند یا نه، باید بررسی کرد که آیا کوانتیزه کردن آن اسپین را معرفی می کند یا خیر.

همه سیستمهای فیزیک را نمی توان با مدلهای کلاسیک توصیف کرد اما زمانی که در فواصل کمتر و انرژی های بیشتر بررسی میکنیم، باید از مکانیک کوانتومی استفاده کند. در فواصل حتی کوچکتر و انرژیهای بالاتر، باید نظریه ریسمان را به کار گرفت. با این حال، مبنای ریاضی هم مکانیک کوانتومی و هم نظریه ریسمان، تقارن است.

تقارن ها در سیستم های کلاسیک نشان دهنده ی یک کمیت بقادار است که از آن ها برای به دست آوردن و توضیح معادله ی حرکت استفاده میکنیم. معمولا این مقادیری که در آزمایش ها بررسی میکنیم، بقادار هستند مانند اندازه حرکت و انرژی. تقارن ها در مکایک کوانتوم هم به همین شیوه عمل میکنند و اصولا عدد کوانتومی یک سیستم را مشخص میکند. کمیت های کلاسیک اصولا یک همتای کوانتومی دارند اما عکس آن لزوما همواره برقرار نیست. اسپین یک کمیت کوانتومی است که در سیستم کلاسیک آن به طور واضح مشخص نیست. همتای کلاسیک یک کمیت، توسط بردار پائولی لوبانسکی توصیف میشوند که در این مقاله از آن تنها برای ذرات جرم دار استفاده میکنیم.

اندازه حرکت زاویه ای کل دز فیزیک کلاسیک مشابه اندازه حرکت زاویه ای مداری در کوانتوم است اما در مکانیک کوانتوم باید اندازه حرکت اسپینی را هم در نظر بگیریم. اندازه حرکت اسپینی چیزی است که اسپین را در مکانیک کوانتومی تعریف میکند و هیچ تعریفی در مکانیک کلاسیک ندارد اما از آنجایی که بعضی از کمیت ها یکلاسیک پس از کوانتیزه شدن اسپین را نشان میدهند ما بیان میکنیم که در مکانیک کلاسیک، این کمیت ها دارای اسپین هستند که با بررسی آن ها درک بهتری از مکانیک کوانتوم به دست می آوریم

2. طرح مسئله

سوال اصلی این پروژه این است که تقارن و اسپین چگونه در زمینه یک سیستم تک ذره ای معرفی می شوند. این بعدها به منظور توصیف تقارن ها و اسپین های سیستم های متشکل از چند ذره و در نهایت به نظریه میدان گسترش می یابد. هدف از این کار، دستیابی به درک بهتری از اهمیت عملیات تقارن و اینکه چگونه می توان از تقارن ها برای یافتن کمیت های پایسته مانند جریان های نوتر و بارهای نوتر استفاده کرد. ما همچنین می خواهیم بدانیم که چگونه می توان یک ویژگی مکانیکی کوانتومی را در فیزیک کلاسیک توصیف کرد. در این پایان نامه اسپین کمیت مکانیکی کوانتومی در فیزیک کلاسیک توضیح داده شده است. بنابراین هدف اصلی ما درک تقارن است و سپس توصیف اسپین با تقارن را در فیزیک کلاسیک.

3. ذره ی نقطه ای

برای شروع، از یک ذره ی جرم دار آزاد استفاده میکنیم و ثابت میکنیم که کنش تحت تبدیلات غیر نسبیتی گروه پوانکاره ناورداست. برای این کار در ابتدا ناوردا بودن کنش یک ذره ی آزاد را تحت تبدیلات گالیله بررسی میکنیم. کنش به صورت زیر تعریف میشود:

$$S = \int L dt \quad (3.1)$$

که L در آن لاگرانژی سیستم است و به صورت زیر تعریف میشود که در آن T انرژی جنبشی و U انرژی پتانسیل است.

$$L = T - U \quad (3.2)$$

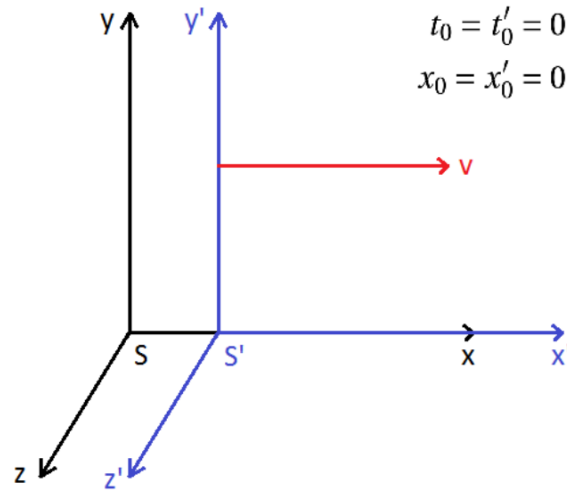
برای یک ذره ی آزاد $U = 0$ ، پس با استفاده از معادله ی 3.1، فرم غیر نسبیتی کنش را برای یک ذره ی رم دار آزاد به دست می آوریم:

$$S = \int T dt = \frac{m}{2} \int \dot{\vec{r}}^2 dt \quad (3.3)$$

که در آن $\vec{r}$ بردار مکان و m ، جرم اینرسی است.

تفاوت بین جرم اینرسی و جرم گرانشی در این است که، جرم اینرسی مقاومت اینرسی ای است که جسم در برابر شتاب، زمانی که به آن نیرو وارد میشود نشان می دهد و جرم گرانشی، قدرت نیرویی که جسم در حین قرار گرفتن در میدان گرانشی تجربه می کند. همه آزمایشها معادل بودن بین جرم اینرسی و جرم گرانشی را تأیید می کنند و آلبرت اینشتین نسبت عام را با این فرض توسعه داد که نمی توان تفاوت بین جرم اینرسی و گرانشی را از طریق آزمایش تشخیص داد. [1]

4. تبدیلات گالیه



$$t_0 = t'_0 = 0$$

$$x_0 = x'_0 = 0$$

3.1: دو دستگاه مختصات

تبدیلات گالیه رابطه ی حاکم بین دو دستگاه مختصات $S = (t, x, y, z)$ و $S' = (t', x', y', z')$ ، در فیزیک غیرنسبیتی (نیوتونی) بیان میکند. اگر یکی از آن ها، S ، ثابت باشد و دیگری با سرعت ثابت v در راستای x از آن دور شود که در آن v از سرعت نور کوچک تر است، $v \ll c$ ، در زمان $t_0 = t'_0 = 0$ هر دو دستگاه در مرکز قرار دارند یعنی $x_0 = x'_0 = 0$ [1]

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases} \quad (3.4)$$

با این حساب کنش در دستگاه در حال حرکت

(3.5)

$$\begin{aligned}
S' &= \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} \vec{r}'^2 dt = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') dt \\
&= \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} \{(\dot{x}' - v)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\} dt \\
&= \frac{m}{2} \left(\int_{t_a}^{t_b} \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\} dt + \int_{t_a}^{t_b} (v^2 - 2\dot{x}v) dt \right) \\
&= \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} \vec{r}^2 dt \\
&\quad + \frac{mv}{2} (v(t_b - t_a) - 2(x(t_b) - x(t_a))) = S + \zeta
\end{aligned}$$

در اینجا ζ یک ثابت هست و برابر است با

$$\zeta = \frac{mv}{2} (v(t_b - t_a) - 2(x(t_b) - x(t_a))) \quad (3.6)$$

از آن جا که ζ در دو نقطه ی ابتدا و انتهای یک مقدار ثابت است، t_a و t_b ، میتوان از این جمله صرف نظر کرد چون در لاگرانژی بی اثر خواهد بود. پس کنش غیر نسبیتی، تحت تبدیلات گالیله ناورداست.

3.3 کنش نسبیتی ذره ی جرم دار

برای یک سیستم که در آن سرعت ها نزدیک به سرعت نثر هستند، از تبدیلات اورنتس استفاده میکنیم. حال کنش را برای همچین سیستمی به دست می آوریم. ما کنش ذره ی نقطه ای نسبیتی را در راستای مسیر حرکتش متناسب با فاصله ی نسبیتی، ds ، و در دو نقطه ی انتهای t_a و t_b [1]

$$S = a \int_{t_a}^{t_b} ds \quad (3.7)$$

در اینجا a یک ثابت است که مقدار آن با توجه به حد غیر نسبیتی کنش به دست می آید. با استفاده از متریک مینکوفسکی، فاصله ی نسبیتی را به دست می آوریم.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} S &= a \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \frac{a}{i} \int_{t_a}^{t_b} i \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -ia \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} \\ &= -ia \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \\ &= -ia \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\ &= -ia \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \dot{r}^2} dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

در سرعت های غیر نسبیتی $\dot{r} \ll 1$ حال میتوانیم از بسط تیلور استفاده کنیم:

$$S \approx -ia \int_{t_a}^{t_b} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2}\right) dt = -ia(t_b - t_a) + \frac{ia}{2} \int_{t_a}^{t_b} \dot{r}^2 dt \quad (3.11)$$

عبارت $-ia(t_b - t_a)$ یک مقدار ثابت در دو نقطه ی انتهایی t_a و t_b است پس میتوانیم از آن صرف نظر کنیم. که به این ترتیب ما کنش غیر نسبیتی زیر را به دست می آوریم:

$$S = \frac{ia}{2} \int_{t_a}^{t_b} \dot{r}^2 dt = \frac{ia}{2} \int_{t_a}^{t_b} \dot{\vec{r}}^2 dt \quad (3.12)$$

با مقایسه ی آن با کنش 3.3، کنش نسبیتی را برای یک ذره ی جرم دار آزاد به دست می آوریم:

$$S = -m \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -m \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} d\lambda \quad (3.13)$$

که λ ، یک پارامتر مسیر ذره است. اگر $\lambda = t$ باشد ما به دست می آوریم:

$$S = -m \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{-\dot{x}^2} dt \quad (3.14)$$

3.4 معادله ی حرکت برای یک ذره ی آزاد

از آنجایی که ما در تلاش هستیم که نسبیت خاص برای همه ی سرعت ها صدق کند همانطور که دیدیم کنش نسبیتی 3.14 برابر کنش غیر نسبیتی 3.3 در حد سرعت های پایین است. حال معادله ی حرکت را بررسی میکنیم:

برای پیدا کردن معادله ی حرکت، کنش را در مسیر حرکت مینیمم میکنیم و معادله ی اویلر لاگرانژ را به دست می آوریم: [1]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.15)$$

که q_i مختصات تعمیم یافته است.

با استفاده از کنش 3.3 ما معادله ی زیر را به دست می آوریم:

$$m\ddot{r}_j = 0 \quad (3.16)$$

با در نظر گرفتن سه مختصه ی $j = x, y, z$ ، در صل قانون دوم نیوتون را در زمانی که مجموع نیروها صفر است به دست می آوریم: زمانی که هیچ نیروی خارجی ای بر روی ذره عمل نمیکند:

$$m\ddot{\vec{r}} = 0 \rightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \quad (3.17)$$

برای یک ذره ی نسبیتی کنش توسط معادله ی 3.13 داده میشود. با مقایسه ی 3.14 و 3.1 و $\lambda = t$ لاگرانژین برای یک ذره ی نسبیتی آزاد به دست می آید:

$$L = -m\sqrt{-\dot{x}^2} \quad (3.18)$$

با استفاده از معادله ی اویلر لاگرانژ، معادله ی حرکت زیر را به دست می آوریم:

$$\ddot{X}^a = \frac{\dot{X}^b \ddot{X}^c}{\dot{X}^2} \dot{X}^a \quad (3.19)$$

$$x^\mu = (t, \bar{r}) \rightarrow (0, \ddot{r}) = - \frac{\dot{\bar{r}} \cdot \ddot{\bar{r}}}{1 - \dot{\bar{r}}^2} (1, \dot{\bar{r}}) \quad (3.20)$$

در حد غیر نسبیتی $\dot{\bar{r}} \ll 1$

$$(0, \ddot{r}) = - \frac{\dot{\bar{r}} \cdot \ddot{\bar{r}}}{1 - \dot{\bar{r}}^2} (1, \dot{\bar{r}}) \rightarrow - \frac{0 \cdot \ddot{\bar{r}}}{1 - 0^2} (1, \dot{\bar{r}}) = (0, \bar{0}) \rightarrow \ddot{r} = 0 \quad (3.21)$$

این مقدار همانند مقدار غیر نسبیتی است، نسبیت خاص برای سرعت های پایین نیز برقرار است.

4 گروه لورنتس

گروه لورنتسی گروهی است که چهار بردار $x^\mu = (t, \bar{x})$ را توسط خیز و چرخش تبدیل میکند. در گروه لورنتسی، شش مولد وجود دارد، سه خیز در راستای یک محور و سه چرخش دور یک محور ثابت. تبدلات لورنتس را با Λ_ν^μ و چهار بردار تحت تبدیل لورنتس به صورت زیر نمایش داده میشود: [2]

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (4.1)$$

که در آن x'^μ یک چهار بردار در دستگاه S' است که S یک دستگاه ساکن است و S' تحت تاثیر خیز یا چرخش است که لورنتس بر روی آن عمل کرده است.

4.1 خیز

اگر S' تحت تاثیر خیز باشد، در این صورت S' در حال حرکت با سرعت ثابت $\bar{v}$ در راستای یک محور است. بر خلاف تبدیلات گالیله، سرعت میتواند نزدیک سرعت نور باشد. در اسن صورت تبدیل لورنتس در راستای x برابر است با:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}; \beta = \frac{v}{c} \quad (4.3)$$

با استفاده از 4.1 میتوانیم چهار بردار را در دستگاه خیز یافته بنویسیم:

$$x'^\mu = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(t - \beta x) \\ \gamma(-\beta t + x) \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\rightarrow \dot{x}'^\mu = \begin{bmatrix} \gamma(1 - \beta\dot{x}) \\ \gamma(-\beta + \dot{x}) \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

با استفاده از 3.14 کنش را برای یک ذره ی جرم دار آزاد در یک سیستم خیز یافته به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} S' &= -m \int \sqrt{\dot{x}'^\mu \dot{x}'_\mu} dt \\ &= -m \int \sqrt{\gamma^2(1 - \beta\dot{x})^2 - \gamma^2(-\beta + \dot{x})^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\ &= -m \int \sqrt{\gamma^2(1 - 2\beta\dot{x} + \beta^2\dot{x}^2 - \beta^2 + 2\beta\dot{x} - \dot{x}^2) - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\ &= -m \int \sqrt{(1 - \beta^2)^{-1}(1 - \beta^2)(1 - \dot{x}^2) - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\ &= -m \int \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt = -m \int \sqrt{\dot{x}'^\mu \dot{x}'_\mu} dt = S \end{aligned} \quad (4.6)$$

تبدیل لورنتس برای یک خیز در یک جهت دلخواه برابر است با:

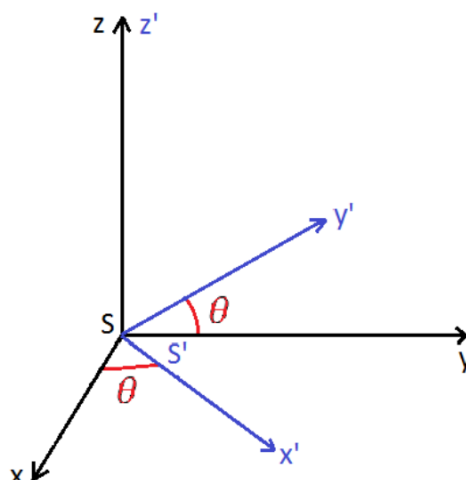
$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

که در آن $\beta_i = \frac{v_i}{c}$ است.

4.2 چرخش حول یک محور ثابت

دستگاه S' نسبت به دستگاه S که به اندازه θ حول یک محور دوران داشته است.

یک چرخش به اندازه θ حول محور z ، که تبدیل لورنتس در آن به صورت زیر داده میشود:



شکل 4.1 دوران حول محور z

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

با استفاده از 4.1، چاربردار در سیستم دوران یافته به صورت زیر است:

$$x'^{\mu} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\dot{x}'^{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

حال با استفاده از 3.14 کنش را برای یک ذره ی جرم دار آزاد در یک سیستم در حال چرخش به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 S' &= -m \int \sqrt{\dot{x}^{\mu'} \dot{x}_{\mu'}} dt \\
 &= -m \int \sqrt{1 - (\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta)^2 - \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta^2 + \dot{z}^2} dt \\
 &= -m \int \sqrt{1 - \dot{x}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{x}\dot{y}\cos \theta \sin \theta - \dot{y}^2 \sin^2 \theta - \dot{x}^2 \sin^2 \theta - 2\dot{x}\dot{y}\cos \theta \sin \theta - \dot{y}^2 \cos^2 \theta} dt \\
 &= -m \int \sqrt{(1 - \dot{x}^2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \dot{y}^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \dot{z}^2} dt \\
 &= -m \int \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt = -m \int \sqrt{\dot{x}^{\mu'} \dot{x}_{\mu'}} dt \\
 &= S
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

پس کنش تحت دوران ناورداست. دوران را به صورت تعمیم یافته در سه بعد میتوان به صورت زیر نمایش داد: [3]

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

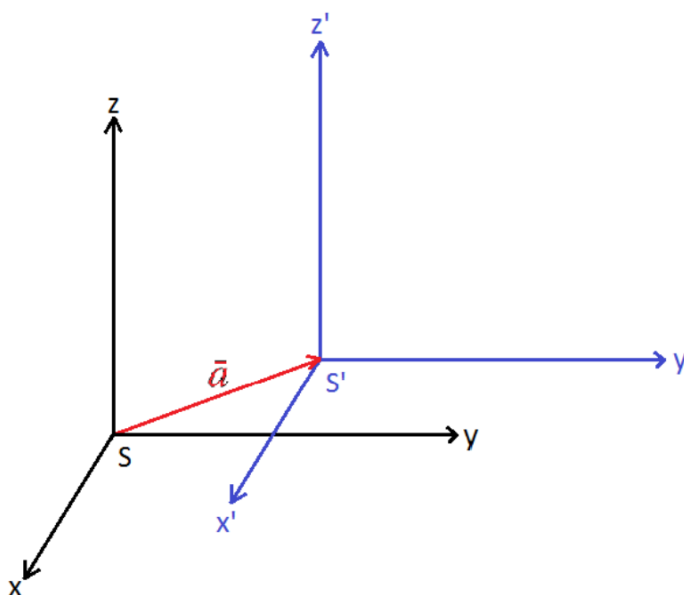
5 گروه پوانکاره

تا اینجا ناوردا بودن کنش را در معادله ی 3.14 تحت تبدیل لورنتس نشان دادیم. حال میخواهیم ناوردا بودن کنش را تحت تبدیلات گروه پوانکاره نشان دهیم.

گروه پوانکاره گروه ایزومتريهای فضا-زمان مینکوفسکی است. گروه پوانکاره که یکی گروه لی غیر آبدلی با ده مولد است در واقع گروه تبدیلات لورنتس به علاوه جابجایی در فضا-زمان است؛ بنابراین ده مولد آن شامل سه مولد برای دوران (حول سه محور فضا)، سه مولد برای خیز لورنتس (در سه راستای فضا)، تا اینجا شش مولد گروه لورنتس، و چهار مولد برای جابجایی در فضا-زمان (سه مولد برای جابجایی در فضا و یک مولد برای جابجایی در زمان) است. [4]

5.1 انتقال

انتقال یک جابه جایی در فضا زمان است.



شکل 5.1: انتقال در فضا

به زبان ریاضی یک انتقال به معنی اضافه کردن مقدار ثابت a^μ به فصل-زمان به صورت زیر است:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \quad (5.1)$$

از آنجایی که a^μ یک مقدار ثابت است، به راحتی میتوانیم ثابت کنیم که کنش برای یک ذره ی آزاد، تحت انتقال ناورداست

$$\begin{aligned} S &= -m \int \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} dt \rightarrow -m \int \sqrt{-\frac{d}{dt}(x^\mu + a^\mu) \frac{d}{dt}(x_\mu + a_\mu)} dt \\ &= -m \int \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} dt = S \end{aligned} \quad (5.2)$$

بنابراین کنش (3.14) تحت انتقال ناورداست و به همین دلیل تحت همه ی تبدیلات گروه پوانکاره ناورداست.

کنش غیر نسبیتی یک ذره ی جرم دار آزاد تحت انتقال ناورداست

$$\begin{cases} \bar{r} \rightarrow \bar{r} + \bar{a} \\ t \rightarrow t + a_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

که در آن $\bar{a}$ و a_0 ثابت هستند.

$$S = \frac{m}{2} \int \dot{r}^2 dt \rightarrow \frac{m}{2} \int \left(\frac{d}{dt}(\bar{r} + \bar{a}) \right)^2 dt = \frac{m}{2} \int \dot{\bar{r}}^2 dt = S \quad (5.4)$$

6 قضیه ی نوتر

ما ثابت کردیم که (3.14) تحت تغییرات پوآنکاره ناوردا است. حال بیایید کمیتی را بیابیم که در اگر آن را کمی کنیم، اسپین یک ذره را مشخص کند. برای انجام این کار، ما باید قضیه نوتر را در نظریه میدان بررسی کنیم اما ابتدا این قضیه را در حالت ساده محاسبه میکنیم.

6.1 قضیه ی نوتر در مکانیک کلاسیک

تقارن در نظریه های کلاسیک بیان کننده ی یک کمیت بقادر هست. با استفاده از قضیه ی نوتر میتوانیم این مقدار را به دست بیاوریم. با استفاده از یک تابع دلخواه $f = f(x, y, y')$ با لاگرانژین $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q, \dot{q})$ با فرض ناوردا بودن لاگرانژین تحت تبدیلات [5]

$$\begin{cases} t \rightarrow \tilde{t} = t + \delta t \\ q_k \rightarrow \tilde{q}_k = q_k + \delta q_k \end{cases} \quad (6.1)$$

که t در آن مولفه ی زمانی و q_k مختصات تعمیم یافته است. فرض کنید که این تبدیلات دارای مولد ξ و η هستند که در آن:

$$\begin{cases} \delta x = \epsilon \xi \\ \delta q_k = \epsilon \eta_k \end{cases} \quad (6.2)$$

که در آن ϵ یک مقدار ثابت است. با به دست آوردن جریان تویتر J خواهیم داشت:

$$j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \eta_k + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \xi = p^k \eta_k - (p^k \dot{q}_k - \mathcal{L}) \xi = p \eta - H \xi \quad (6.3)$$

که در آن p_K اندازه ی حرکت برای k امین مختصات تعمیم یافته یعنی q_k است و H هامیلتونی است.

6.2 قضیه ی نوتر در نظریه ی میدان

برای رسیدن به نظریه ی میدان، مقادیر گسسته را به مقادیر پیوسته تبدیل میکنیم و به جای استفاده از t ، از چاربردار x^μ استفاده میکنیم. مختصه ی پیوسته ی تعمیم یافته Φ هست و به اسن ترتیب لاگرانژی برابر خواهد بود با: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \Phi, \partial_\mu \Phi)$. که در آن ∂_μ نشان دهنده ی مشتق نسبت به چاربردار x^μ .

با فرض ناوردا بودن چگالی لاگرانژی تحت تبدیل، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow \widetilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \Phi_k(\bar{x}) \rightarrow \widetilde{\Phi}_k(\bar{x}) = \Phi_k(\bar{x}) + \delta \Phi_k(\bar{x}) \end{cases} \quad (6.4)$$

علاوه بر این فرض کنید که این تبدیلات دارای مولد ξ و η هستند که در آن:

$$\begin{cases} \delta x^\mu = \epsilon \xi^\mu \\ \delta \Phi_k(\bar{x}) = \epsilon \eta_k(\bar{x}) \end{cases} \quad (6.5)$$

که در آن ϵ یک مقدار ثابت است. با به دست آوردن جریان ناوردای نویتر j^μ خواهیم داشت: [4]

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \eta_k - T^{\mu\nu} \xi_\nu \\ T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \partial^\nu \Phi_k - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned} \quad (6.6)$$

که در آن $T^{\mu\nu}$ تانسوری تنش انرژی است که به صورت زیر تعریف میشود:

$$T^{ij} = \begin{vmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{01} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{02} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{03} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{vmatrix}$$

که در آن

• T^{01}, T^{02}, T^{03} چگالی ممنتوم

• T^{00} چگالی انرژی

• T^{11}, T^{22}, T^{33} فشار

• T^{21}, T^{31}, T^{32} شار ممنتوم

• T^{12}, T^{13}, T^{23} تنش

علاوه بر آن یک مفهومی به نام بار نویتر معرفی میکنیم که ناورداست و به شکل زیر تعریف میشود:

$$Q = \int d^3 \tilde{x} j^0 \quad (6.7)$$

7 اسپین پائولی لوبانسکی

7.1 اسپین پائولی لوبانسکی

ما به دنبال یک مقدار کلاسیکی هستیم که تحت تبدیلات گروه پوانکاره ناورداست و اگر کوانتیزه شود اسپین ذره را به ما نشان میدهد. حال برای اینکار با اندازه حرکت زاویه ای کل یعنی $J^{\nu\rho}$ ، به عنوان بار نوتر برای جریان تغییر یافته ی نوتر، $J^{\mu,\nu\rho}$ تحت تبدیلات لورنتس.

حال چگالی لاگرانژ را که تحت تبدیلات لورنتس ناورداست در نظر میگیریم

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x'^\mu &= \Lambda^\mu_\rho x^\rho = \left(\delta^\mu_\rho - \omega^\mu_\rho + \mathcal{O}(\omega^2) \right) x^\rho \\ &\approx \delta^\mu_\rho x^\rho - \omega^\mu_\rho x^\rho = x^\mu - \omega^\mu_\rho x^\rho \end{aligned} \quad (7.1)$$

در اینجا ω^μ_ρ کمیتی محدود است و علاوه بر آن طبق پیوست 4 کمیتی پادمتقارن است $\omega_{\rho\nu} = -\omega_{\nu\rho}$ اگر یک تانسور متقارن باشد، می توان دو اندیس را بدون تغییر علامت مبادله کرد، اگر تانسوری پاد متقارن باشد، باید با مبادله دو اندیس، علامت را تغییر داد.

$$\begin{cases} A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \rightarrow A^{\mu\nu}: \text{symmetric} \\ A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \rightarrow A^{\mu\nu}: \text{antisymmetric} \end{cases} \quad (7.2)$$

با استفاده از نوتر در نظریه ی میدان، جریان نوتر یعنی j^μ که تحت تبدیلات لورنتس ناورداست را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} j^\mu &= -T^{\mu\nu}(\omega_{\nu\rho} x^\rho) = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho} x^\rho + T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho} x^\rho) \\ &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho} x^\rho - T^{\mu\nu}\omega_{\rho\nu} x^\rho) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \end{aligned} \quad (7.3)$$

از آنجایی که $\frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}$ یک مقدار ثابت است، میتوانیم از آن صرف نظر کنیم و جریان نوتر تغییر یافته را یعنی $J^{\mu,\nu\rho}$ به دست بیاوریم.

$$\mathcal{J}^{\mu,\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu \quad (7.4)$$

عبارت $\mathcal{J}^{\mu,\nu\rho}$ را به عنوان چگالی تکانه ی زاویه ای کل تعریف میشود و بار نوتر $J^{\nu\rho}$ به عنوان تکانه ی زاویه ای کل تعریف میشود:

$$J^{\nu\rho} = \int d^3\bar{x} \mathcal{J}^{0,\nu\rho} \quad (7.5)$$

پس تکانه ی زاویه ای کل، تحت تبدیلات لورنتس ناورداست. با این حال تحت انتقال ناوردا نیست. با استفاده از انتقال در فضا-زمان (5.1) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{0,\nu\rho} &= x^\rho T^{0\nu} - x^\nu T^{0\rho} \rightarrow (x^\rho + a^\rho) T^{0\nu} - (x^\nu + a^\nu) T^{0\rho} \\ &= x^\rho T^{0\nu} - x^\nu T^{0\rho} + a^\rho T^{0\nu} - a^\nu T^{0\rho} \\ &= \mathcal{J}^{0,\nu\rho} + a^\rho T^{0\nu} - a^\nu T^{0\rho} \neq \mathcal{J}^{0,\nu\rho} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$J^{\nu\rho} \rightarrow J^{\nu\rho} + a^\rho P^\nu - a^\nu P^\rho \neq J^{\nu\rho} \quad (7.7)$$

که در آن تکانه ی P^μ به شکل زیر تعریف میشود:

$$P^\mu = \int d^3\bar{x} T^{0\mu} \quad (7.8)$$

پس تکانه ی زاویه ای کل، $J^{\nu\rho}$ ، تحت انتقال ناوردا نیست پس در این جا بردار اسپین پائولی لوبانسکی، W_μ را معرفی میکنیم که تحت انتقال ناورداست. [6]

$$W_\mu := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma \quad (7.9)$$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ پادمتقارن است و از آن به عنوان لوی-چویتا که به صورت زیر تعریف میشود:

$$\epsilon_{ijkl} = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{if } i, j, k, l \text{ is an even permutation of } (1, 2, 3, 4) \\ -1 \rightarrow \text{if } i, j, k, l \text{ is an odd permutation of } (1, 2, 3, 4) \\ 0 \rightarrow \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.10)$$

اثبات ناوردا بودن بردار اسپین پائولی لوبانسکی تحت انتقال در ضمیمه ی 5. با توجه به ضمیمه ی 5 به دست می آوریم:

$$J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu} \quad (7.11)$$

در 4.5، W_0 را پیدا میکنیم. به همین ترتیب W_μ را پیدا میکنیم:

$$\begin{cases} W_0 = J^{12}P^3 + J^{31}p^2 + J^{23}P^1 \\ W_1 = J^{20}P^3 + J^{03}p^2 + J^{23}P^1 \\ W_2 = J^{01}P^3 + J^{30}p^2 + J^{13}P^1 \\ W_3 = J^{10}P^3 + J^{02}p^2 + J^{21}P^1 \end{cases} \quad (7.12)$$

تکانه در دستگاه سکون یک ذره ی جرم دار برابر است با:

$$P^\mu = (E_0, \vec{0}) = (m, \vec{0}) \quad (7.13)$$

E_0 انرژی ذره در حالت ساکن و m جرم سکون ذره است. با استفاده از 7.12 و 7.13 بردار اسپین پائولی لوبانسکی را در چارچوب سکون یک ذره ی جرم دار به دست می آوریم

$$W_\mu = (0, mJ^{23}, mJ^{13}, mJ^{21}) = (0, mJ_x, mJ_y, mJ_z) = (0, m\vec{J}) \quad (7.14)$$

پس در نتیجه بردار اسپین پائولی لوبانسکی متناسب با اندازه حرکت زاویه ای کل، یعنی $\vec{J}$ در چارچوب سکون ذره است.

7.2 کوانتیزه کردن اسپین پائولی لوبانسکی

حال میخواهیم عملگر کازیمیر A^2 را برای سری عملگرهای A_α پارامتریزه کنیم و آن را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$A^2 = A^\alpha A_\alpha ; \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (7.15)$$

عملگر کازیمیر A^2 ، با همه ی A_α ها جابه جا میشود و علاوه بر آن تحت هر تبدیلی که A_α در آن ناوردا است، ناورداست.

از آنجا که اسپین پائولی لوبانسکی کل، $\Sigma_n W_{n\mu}$ کمیتی بقادر است، عملگر کازیمیر W_i^2 برای اسپین پائولی لوبانسکی، $W_{i\mu}$ برای ذره ی i ام است. پس با نگاه به دستگاه مرکز جرم . استفاده از 7.14 به دست می آوریم:

$$W_i^2 = W_i^\mu W_{i\mu} = -0 + m^2 \vec{J}_i^2 = m^2 \vec{J}_i^2 \quad (7.16)$$

در دستگاه لخت ذره

$$\vec{L} = 0 \rightarrow \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{S} \quad (7.17)$$

$\vec{L}$ اندازه حرکت مداری و $\vec{S}$ اندازه حرکت اسپینی است. با استفاده از 7.17 به دست می آوریم که در نظریه ی میدان کوانتومی، W_i^2 ویژه مقدار اسپینی دارد

$$W_i^2 \Psi = m^2 s_i (s_i + 1) \Psi \quad (7.18)$$

Ψ نمایانگر حالت فیزیکی و s_i ، عدد کوانتومی اسپینی ذره ی i است.

حال مشاهده کرده ایم که عملگر کازیمیر W^2 بیانگر اسپین یک ذره ی جرم دار است. از آنجا که چرخش پائولی-لوبانسکی در نظریه میدان کوانتومی تحت تبدیلات پوانکاره ناوردا است، و متناسب با حرکت زاویه ای در چارچوب سکون ذره است، چرخش پائولی-لوبانسکی برچسب خوبی برای اسپین در زمینه نظریه ی میدان کلاسیک است.

8 ذرات چرخنده

بنابراین ما در نظریه میدان کلاسیک عبارتی را مشاهده کرده ایم که چرخش یک ذره را توصیف می کند. حال کنش یک ذره در حال چرخش نگاه میکنیم، یعنی به کنش ذره ای نگاه میکنیم که کنش کوانتیزه آن اسپین را معرفی می کند. یک راه برای انجام این کار، از کنش یک ریسمان بوزونی و فشرده سازی یک بعد ریسمان است.

8.1 کنش ریسمان بوزونی

کنش های استفاده شده در ریسمان بوزونی کنش نامبو-گاتو و معادل کلاسیک آن کنش پلیکاو. حال این کنش ها را بررسی میکنیم. برای شروع از کنش یک ریسمان بوزونی استفاده میکنیم:

$$S = TA = t \int dA \quad (8.1)$$

که T در آن کشش و A مساحت صفحه ی جهانی است که توسط ریسمان پوشیده میشود. المان سطح جهان، dA ، را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$dA = d^2\xi \sqrt{-\gamma} \quad (8.2)$$

که در آن γ دترمینان ماتریس القایی γ_{mn} در ریسمان است:

$$\begin{aligned} \gamma &= \det(\gamma_{mn}) \\ \gamma_{mn} &= \partial_m X^\mu \partial_n X_\mu \\ m, n &\in \{1, 2\}, \mu \in \{0, 1, \dots, D-1, D\} \end{aligned} \quad (8.3)$$

$\xi = (\tau, \sigma)$ پارامتری است که صفحه ی جهان ریسمان را پوشش میدهد که در آن σ فضاگونه و τ زمان گونه است. [7]

$$\begin{aligned} d^2\xi &= d\sigma d\tau \\ X' &= \frac{dX}{d\sigma}, \quad \dot{X} = \frac{dX}{dt} \end{aligned} \quad (8.4)$$

تابع $X^\mu(\tau, \sigma)$ شکل صفحه ی جهانی را مشخص میکند. D تعداد بعد های فضایی هست و $X(\tau, \sigma)$ مختصات صفحه ی جهان است.

$$X(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^{D-1}(\tau, \sigma), X^D(\tau, \sigma)) \quad (8.5)$$

با استفاده از 8.2 به دست می آوریم:

$$S = T \int dA = T \int d^2\xi \sqrt{-\gamma} \quad (8.6)$$

به این کنش، کنش نامبو-گاتو گفته میشود. بعضی اوقات میتوان از کنش پلیکاو که به طور کلاسیک معادل با نامبو-گاتو است هم استفاده کرد که به صورت زیر است: [8]

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{mn} \gamma_{mn} = \frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{mn} \partial_m X^\mu \partial_n X_\mu \quad (8.7)$$

که در آن g^{mn} متریک صفحه ی جهان است:

$$g = \det(g_{mn}) \quad (8.8)$$

هم کنش نامبو-گاتو و هم کنش پلیکاو تحت تبدیلات پوانکاره ناوردا هستند و برای پارامتریزه کردن، از روابط زیر پیروی میکنند: [7]

$$\begin{cases} X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + a^\mu \\ X^\mu \rightarrow X^\mu + \Xi^a \partial_a X^\mu \\ g_{mn} = g_{mn} + \Xi^a \partial_a g_{mn} + \partial_m \Xi^a g_{an} + \partial_n \Xi^a g_{ma} \end{cases} \quad (8.9)$$

8.2 کنش یک ذره ی صلب

مختصات یک ذره فقط تابعی از τ است. پس حال اگر بخواهیم از کنش یک رشته ی بوزونی به کنش یک ذره ی بوزونی برویم، X^μ به صورت زیر تغییر میکند:

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X^\mu(\tau) \quad (8.10)$$

با استفاده از ناوردا بودن پارامتریزه کردن، تبدیلات پیمانه ای را میتوانیم درست کنیم: [8]

$$X^D = \sigma \quad \sigma \in [0, 2\pi R] \quad (8.11)$$

که به ما دو جمله ی زیر را میدهد:

$$\begin{cases} X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau) + R\sigma y^\mu(\tau) \\ g^{mn} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \rightarrow g_{mn} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.12)$$

که در آن به R ، شعاع فشرده سازی گفته میشود. معادله ی پیمانه ای 8.11 و عبارت $X^\mu(\tau, \sigma)$ (8.12) یک ریسمان با بعد X^D را با بعد σ فشرده میکند. حال بر روی σ انتگرال میگیریم.

با استفاده از کنش پلی کاو برای یک رشته ی بوزونی (8.7) و اگر از جمله های مرتبه ی بالاتر از R^2 صرف نظر کنیم، کنش حاصل شده از ذره ی بوزونی برابر خواهد بود با:

$$S = -\pi RT \int \frac{d\tau}{e} [\dot{x}^2 + R^2(2\pi\dot{x}\dot{y} - e^2 y^2) - e^2] \quad (8.13)$$

با استفاده از معادلات برای میدان y و e به دست می آوریم: [8]

$$\begin{aligned} S &= 2\pi RT \int d\tau \sqrt{\dot{x}^2} \left[1 - \frac{\pi^2 R^2}{2\dot{x}^2} \left(\partial_t \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right)^2 \right] \\ &= \int d\tau \sqrt{\dot{x}^2} \left[2\pi RT + \frac{\pi^3 R^3 T}{-\dot{x}^2} \left(\partial_t \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (8.14)$$

انحنای خارجی، k ، در حالت خاص توسط رابطه ی زیر داده میشود:

$$k := \sqrt{\frac{1}{-\dot{x}^2} \left(\partial_t \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right)^2} \quad (8.15)$$

با تعریف جرم m و پارامتر α به صورت زیر:

$$\begin{cases} m = 2\pi RT \\ \alpha = (\pi^3 R^3 T)^{-1} \end{cases} \quad (8.16)$$

S به صورت زیر نوشته میشود:

$$S = \int d\tau \sqrt{\dot{x}^2} [m + \alpha^{-1} k^2] \quad (8.17)$$

این کنش، کنش برای ذره ی صلب نوع دو است و متناسب است با k^2 .

با استفاده از کنش 8.6، کنش به دست آمده برابر خواهد شد با: [8]

$$\begin{aligned} S &= -\pi RT \int d\tau \sqrt{\dot{x}^2} \left(1 + \frac{R^2}{2\dot{x}^2} [\dot{x}^2 y^2 + 2\pi \dot{x} \dot{y} - (\dot{x} \dot{y})^2] \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} \left(2\pi RT \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^3 R^3 T}{-\dot{x}^2} \left[\frac{\dot{x}^2 y^2}{\pi^2} + \frac{2\dot{x} \dot{y}}{\pi} - \frac{(\dot{x} \dot{y})^2}{\pi^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (8.18)$$

با استفاده از تعریف 8.16:

$$\begin{cases} \frac{x_\mu}{\sqrt{\pi}} \rightarrow x_\mu \\ \frac{y_\mu}{\sqrt{\pi}} \rightarrow y_\mu \end{cases} \quad (8.19)$$

حال کنش 8.18 برابر میشود با:

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} \left(m + \frac{1}{-\alpha \dot{x}^2} [\dot{x}^2 y^2 + 2\dot{x} \dot{y} - (\dot{x} \dot{y})^2] \right) \quad (8.20)$$

این کنش تحت تغییرات پیمانه ای زیر ناورداست: [8]

$$y^\mu(\tau) \rightarrow y^\mu(\tau) + v(\tau) \dot{x}^\mu(\tau) \quad (8.21)$$

که در آن $v(\tau)$ یک تابع دلخواه است. از آنجا که کنش نامبو-گاتو (8.6) به طور کلاسیم برابر کنش پلیکاو (8.7) است، همانطور که کنش (8.20) به طور کلاسیک معادل (8.17) است.

معادله ی میدانی $\mathcal{Y}$ توسط معادله ی زیر داده میشوند:

$$y_\mu = \frac{\ddot{x}_\mu}{\dot{x}^2} \rightarrow \dot{x}y = \frac{\dot{x}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \quad (8.22)$$

با مقایسه این با معادله حرکت برای یک ذره نسبیتی آزاد (3.19)، می توان دریافت که $\dot{x}y$ بخشی است که در حد غیر نسبیتی به صفر همگرا می شود. با قرار دادن به $\dot{x}y \rightarrow 0$ و حذف y با استفاده از معادلات میدان $\mathcal{Y}$ (8.22)، کنش (8.17) به کنش (8.20) تبدیل میشود. بنابراین کنش (8.17) کنش غیر نسبیتی برای یک ذره صلب است، در حالی که کنش (8.20) کنش نسبیتی برای یک ذره صلب است. [9]

8.3 دینامیک کلاسیک برای یک ذره ی صلب

تا اینجا دیده ایم که کنش (8.20)، کنش نسبیتی برای یک جسم صلب است. حال مومنتوم p_μ را با استفاده از کنش پیدا میکنیم. با استفاده از p_μ و P_μ میوانیم مولد های برخی از کنش های متقارن را پیدا کنیم (8.20).

$$p_\mu = \frac{dL}{d\dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}^\mu}{2\sqrt{-\dot{x}^2}} - \frac{1}{2\alpha(-\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} [\dot{x}^2 y^2 \dot{x}_\mu - 2\dot{x}\dot{y}\dot{x}_\mu + 2\dot{x}^2 \dot{y}_\mu + (\dot{x}y)^2 \dot{x}_\mu - 2(\dot{x}y)\dot{x}^2 y_\mu] \quad (8.23)$$

$$P_\mu = \frac{dL}{d\dot{y}^\mu} = \frac{\dot{x}^\mu}{\alpha\sqrt{-\dot{x}^2}}$$

مومنتوم p_μ و P_μ تحت انتقال ناوردا هستند.

$$\begin{cases} x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu \\ y_\mu \rightarrow y_\mu + a_\mu \end{cases} \quad (8.24)$$

اندازه حرکت زاویه ای J_μ تحت چرخش ناورداست.

$$\begin{cases} x_\mu \rightarrow x_\mu + \Lambda_\mu^{\nu} x_\nu \\ y_\mu \rightarrow y_\mu + \Lambda_\mu^{\nu} y_\nu \end{cases} \quad \Lambda_\mu^{\nu} = -\Lambda^{\nu}_{\mu} \quad (8.25)$$

اندازه حرکت زاویه ای کل $J_{\mu\nu}$ توسط معادله ی زیر تعریف میشود:

$$J_{\mu\nu} := M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \quad (8.26)$$

$M_{\mu\nu}$ تانسور اندازه حرکت و $S_{\mu\nu}$ تانسور اسپین است [9].

$$\begin{cases} M_{\mu\nu} = p_{[\mu} x_{\nu]} = \frac{1}{2} (p_{\mu} x_{\nu} - p_{\nu} x_{\mu}) \\ S_{\mu\nu} = P_{[\mu} y_{\nu]} = \frac{1}{2} (P_{\mu} y_{\nu} - P_{\nu} y_{\mu}) \end{cases} \quad (8.27)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = P^2 + \alpha^{-2} = 0 \\ \phi_2 = Pp + \frac{m}{2\alpha} - S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (8.28)$$

ϕ_1 مولد تبدیلات پیمانه ای (8.21) هست و ϕ_2 مولد جهان خط (8.9) است و قید (8.28) مولد تقارن هایی در کنش (8.20) هستند. از این ما میتوانیم به دست بیاوریم:

$$\{\phi_1, \phi_2\} = 0 \quad (8.29)$$

H را میتوان به صورت ترکیب خطی ϕ_1 و ϕ_2 نوشت: [9]

$$H = v_1 \phi_1 + v_2 \phi_2 \quad (8.30)$$

تحول زمانی $S_{\mu\nu}$ و $J_{\mu\nu}$ برابر است با:

$$\begin{cases} \dot{S}_{\mu\nu} = \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial t} + \{S_{\mu\nu}, H\} = \{S_{\mu\nu}, H\} = v_2 P_{[\mu} p_{\nu]} = \frac{v_2}{2} (P_{\mu} p_{\nu} - P_{\nu} p_{\mu}) \\ \dot{J}_{\mu\nu} = \frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial t} + \{J_{\mu\nu}, H\} = \{J_{\mu\nu}, H\} = 0 \end{cases} \quad (8.31)$$

8.4 کوانتیزه کردن مومنوم و اسپین یک جسم صلب

برای کوانتیزه کردن کنش (8.20)، به دو عملگر ϕ_1 و ϕ_2 نیاز داریم که با یکدیگر جابه جا میشود. در اینجا عملگر ϕ_1 و ϕ_2 فرم مشابهی در مقایسه با مولد های ϕ_1 و ϕ_2 در حالت کلاسیک دارند.

$$\begin{cases} [x_\mu, p_\nu] = [y_\mu, P_\nu] = i g_{\mu\nu} \\ [x_\mu, y_\nu] = [x_\mu, P_\nu] = [y_\mu, p_\nu] = [p_\mu, P_\nu] = 0 \end{cases} \quad (8.32)$$

علاوه بر آن باید در روابط زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} \phi_1 \Psi \equiv [P^2 + \alpha^{-2}] \Psi = 0 \\ \phi_2 \Psi \equiv \left[Pp + \frac{m}{2\alpha} + S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right] \Psi = 0 \end{cases} \quad (8.33)$$

که در آن Ψ حالت فیزیکی را نشان میدهد. با استفاده از روابط بالا به این نتیجه میرسیم:

$$[\phi_1, \phi_2] \Psi = 0 \quad (8.34)$$

با مقایسه ی (8.33) و (8.34) با دو معادله ی (8.28) و (8.29) به دست می آوریم.

تانسور پائولی-لابونسکی توسط رابطه ی زیر داده میشود: [9]

$$W_{\mu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} p_{[\mu} J_{\rho\sigma]} = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} p_{[\mu} S_{\rho\sigma]} = \frac{1}{2\sqrt{-p^2}} (p_\mu S_{\rho\sigma} - p_\sigma S_{\rho\mu}) \quad (8.35)$$

با استفاده از معادله ی حرکت هایزنبرگ میبینیم که ممنتوم و تانسور اسپین پائولی-لابونسکی هر دو کمیت هایی پایسته هستند.

$$\begin{cases} [p_\mu, H] = 0 \rightarrow \dot{p}_\mu = 0 \\ [W_{\mu\rho\sigma}, H] = 0 \rightarrow \dot{W}_{\mu\rho\sigma} = 0 \end{cases} \quad (8.36)$$

بنابراین گروه پوانکاره یک تقارن هست حتی در حالت کوانتیزه علاوه بر آن، عملگر کازیمیر W^2 ویژه مقدار های حقیقی دارد اگر تابع موج $\Psi(x, y) = \Psi$ تک مقدار باشد.

این نشان میدهد که کنش (8.20)، اگر کوانتیزه شود، کنش یک ذره ی در حال چرخش خواهد شد.

9 نتیجه گیری

برای نشان دادن اهمیت تقارن‌ها در سیستم‌های فیزیکی، نشان دادیم که کنش S برای یک ذره نقطه‌ای تحت گروه پوانکاره و نسخه غیر نسبیتی آن ناوردا است. یعنی، ما ثابت کردیم که کنش غیر نسبیتی برای یک ذره نقطه‌ای تحت تبدیل گالیله ثابت است.

کنش نسبیتی را با استفاده از کنش یک ذره نقطه‌ای که به عنوان فاصله نسبیتی، ds ، بین دو زمان، t_a و t_b تعریف می‌شود، به دست می‌آید. با فرض اینکه حد غیر نسبیتی این کنش نسبیتی همان عمل غیر نسبیتی برای یک ذره نقطه‌ای باشد، دریافتیم که کنش نسبیتی برای یک ذره نقطه‌ای توسط:

$$S = -m \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{x}^2} dt \quad (9.1)$$

ما می‌دانستیم که با در نظر گرفتن حد سرعت پایین معادلات حرکت مرتبط با کنش نسبیتی (9.1) می‌توان معادلات حرکت را برای عمل غیر نسبیتی بدست آورد. با این حال، این کار را بدون استفاده از این روش به دست آوردیم تا بتوانیم نشان دهیم اینکه معادلات حرکت مرتبط با کنش (9.1) به معادلات حرکت کنش غیر نسبیتی تبدیل میشوند.

قضیه نوتر نقش مهمی در تقارن سیستم‌های فیزیکی دارد. در زیر هر تقارنی یک کمیت بقادار وجود دارد و با استفاده از قضیه نوتر می‌توان این کمیت‌ها را پیدا کرد. نمونه‌هایی از کمیت‌های پایسته عبارتند از: تکانه، انرژی و بار الکتریکی. حال مثالی از کمیتی نگاه کنیم که تحت دوران حفظ می‌شود.

مثال 1: لاگرانژین L تحت دوران‌های کوچک حول محور $\hat{n}$ ناورداست:

$$\vec{r} \rightarrow \delta\theta \hat{n} \times \vec{r} \quad (9.2)$$

که در اینجا $\delta\theta$ یک زاویه ی ثابت و کوچک است. با استفاده از قضیه ی نوتر، میتوانیم کمیت پایسته ی $\vec{j}$ را به دست بیاوریم:

$$\vec{j} = (\hat{n} \times \vec{r}) \cdot \nabla_{\vec{q}} L = \hat{n} \cdot (\vec{p} \times \vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{L} \quad (9.3)$$

که در آن $\vec{L}$ اندازه حرکت زاویه ای است. پس تحت دوران‌های کوچک حول محور $\hat{n}$ ناورداست.

ما از نظریه کلاسیک به نظریه میدان گذر کردیم تا قضیه نوتر را در نظریه میدان مطالعه کنیم. ما به دست آوردیم که جریان نوتر، j^μ و بار نوتر، Q ، در صورتی پایسته هستند که چگالی لاگرانژی، L ، تحت یک تبدیل در چهار بردار، x^μ ، و میدان ϕ متقارن باشد.

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \eta_k - T^{\mu\nu} \xi_\nu \quad (9.4)$$

$$Q = \int d^3 \bar{x} j^0$$

$T^{\mu\nu}$ تانسور تنش-انرژی است، η_k مولدهای بینهایت کوچک برای تبدیل در میدان ها، ϕ ، و ξ^μ مولد بی نهایت کوچک برای چهار-بردار، x^μ است. ما جریان نوتر، j^μ را برای نوردایی چگالی لاگرانژی تحت تبدیل لورنتس مطالعه کردیم. پس از حذف برخی از ثابت‌های بی‌اهمیت، به یک جریان نوتر اصلاح‌شده، $J^{\mu,\nu\rho}$ رسیدیم که به عنوان چگالی تکانه زاویه‌ای کل تعریف می‌شود. تانسور تکانه زاویه ای کل $j^{\nu\rho}$ ، در تئوری میدان به عنوان بار نوتر برای $J^{\mu,\nu\rho}$ تعریف شده بود. به عبارت دیگر، تکانه زاویه ای کل به گونه ای ساخته شد که تحت تبدیل های لورنتس ثابت باشد. با این حال، نشان دادیم که تحت انتقال ناوردا نیست و بنابراین تحت تمام تبدیل‌های پوانکاره ناوردا نیست. پس از آن، بردار اسپین پائولی-لوبانسکی، W_μ ، معرفی شد:

$$W_\mu := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma \quad (9.5)$$

که در آن P^σ مومنتوم هست و $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ نماد لوی سیویتاست. نشان داده شد که اسپین پاولی لوبانسکی در گروه پوانکاره ناوردا است و اسپین پائولی-لوبانسکی متناسب با تکانه زاویه ای کل در چارچوب سکون یک ذره است. ما دریافتیم که عملگر کازیمیر، W^2 ، برای اسپین پائولی-لوبانسکی برای یک ذره جرم دار در نظریه میدان کوانتومی دارای مقادیر ویژه زیر است (اعداد کوانتومی)

$$W^2 \Psi = m^2 s(s+1) \Psi \quad (9.6)$$

Ψ حالت های فیزیکی را نشان می دهد و s عدد کوانتومی اسپینی است. از آنجایی که عملگر کازیمیر، W^2 ، برای اسپین پائولی-لوبانسکی، اسپین یک ذره جرم دار را در نظریه میدان کوانتومی توصیف می‌کند، و از آنجایی که با تکانه زاویه‌ای کل چارچوب سکون یک ذره متناسب است، ما می‌خواهیم پائولی-اسپین لوبانسکی (9.5) اسپین یک ذره عظیم در نظریه میدان کلاسیک را توصیف کند.

در ادامه، عملگر کازیمیر را برای بردار اسپین پائولی-لویانسکی مطالعه کرده ایم. با این حال، عملگرهای کازیمیر به طور کلی اهمیت زیادی در فیزیک دارند. حال به دو مثال مهم از عملگرهای کازیمیر می پردازیم.

مثال 2. عملگرهای کازیمیر P_i^2 ، برای تکانه، p_i ، ذره i اغلب در نظریه میدان کوانتومی استفاده می شود، به عنوان مثال. زمانی که دامنه پراکندگی یک فرآیند را محاسبه می کند. از آنجایی که تکانه کل، $\sum_n p_n^\mu$ ، سیستم پایسته است، عملگر کازیمیر P_i^2 ، برای تکانه، P_i ، حفظ خواهد شد. بنابراین برای یک ذره i جرم دار داریم:

$$P_i^2 = P_i^\mu P_{i\mu} = -E_i^2 + 0 = -\left(\sqrt{m_i^2 + 0}\right)^2 = -m_i^2 \quad (9.7)$$

مثال 3. در فیزیک کوانتوم اغلب از عملگر کازیمیر، $\bar{L}^2$ ، برای تکانه زاویه ای مداری استفاده میشود. $\bar{L}^2$ و $\bar{L}$ با همه ی مولفه های $\bar{L}$ جابه جا میشوند.

$$\bar{L}^2 \Psi = l(l+1)\Psi \rightarrow \bar{L}\Psi = \sqrt{l(l+1)}\Psi \quad (9.8)$$

در اینجا Ψ حالت فیزیکی را نشان می دهد و l عدد کوانتومی برای حرکت زاویه ای مداری است.

سپس، آن را کنشی برای یک رشته بوزونی کلاسیک در نظر گرفت. با استفاده از ناوردا بودن تحت پارامتریزه کردن دوباره، یک پیمانه ی ثابت را به دست آوردیم. درنهایت کنشی برای یک ذره صلب بوزونی به دست آوردیم:

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} \left(m + \frac{1}{-\alpha \dot{x}^2} [\dot{x}^2 y^2 + 2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}\dot{y})^2] \right) \quad (9.9)$$

در ادامه به دست آوردیم کنش یک ذره ی نسبیتی است چون در حد سرعت های پایین به کنش زیر تبدیل میشود:

$$S = \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} (m + \alpha^{-1} k^2) \quad (9.10)$$

در اینجا k انحنا ی بیرونی است. مشاهده شد که نسخه کوانتیزه شده کنش (9.9)، کنش یک ذره در حال چرخش است. یادآوری این نکته مهم است که کنش (9.9) فقط ذرات با اسپین صحیح را توصیف می کند.

از آنجایی که کنش (9.9) فقط ذرات با اسپین صحیح را توصیف می کند، اگر بخواهیم کنشی برای ذرات در حال چرخش با اسپین نیم صحیح پیدا کنیم باید مطالعه ابرتقارن (SUSY) انجام داد، که بسط گروه پوانکاره

است. بنابراین در آینده می توان SUSY را مطالعه کرد و عمل (9.9) را ابر متقارن کرد تا عملی برای یک ذره در حال چرخش صاف با اسپین نیمه صحیح بدست آورد. در اصل این کار با معرفی یک مختصات فرمیونی، μ ، در جهان خط انجام می شود به طوری که:

$$S = \int d\tau L(\tau) \rightarrow S = \int d\tau d\theta L(\tau, \theta) \quad (9.11)$$

هدف اصلی این تحقیق درک تقارن ها و سپس بررسی اسپین در فیزیک کلاسیک با تقارن بود. ما عملگر های متقارن را بررسی کردیم با اثبات اینکه کنش برای یک ذره نقطه ای تحت تبدیلات گروه پوانکاره و حتی حالت غیر نسبیستی آن ثابت است. علاوه بر این، ما با مطالعه قضیه نوتر به کمیت های بقا دار تحت یک عمل متقارن نگاه کردیم. ما از قضیه نوتر برای توصیف بردار اسپین پائولی-لوبانسکی استفاده کردیم، که آن را کمی کردیم تا ببینیم که اسپین یک ذره را توصیف می کند. اسپین معنای کلاسیک واقعی ندارد، اما اگر می خواهید حرکت زاویه ای کل تحت تبدیل پوانکاره ثابت باشد، باید اسپین را در نظریه کلاسیک معرفی کنید. در نهایت آیا عملی برای یک ذره در حال چرخش صاف با اسپین عدد صحیح پیدا کردیم. برای توصیف یک ذره در حال چرخش صاف با چرخش نیمه صحیح می توان SUSY را مطالعه کرد و عملی را که برای یک ذره در حال چرخش صاف با چرخش نیم عدد صحیح یافتیم فوق متقارن کرد. بنابراین، هدف اصلی برای کار آینده می تواند مطالعه SUSY و دیدن چگونگی گسترش آن به گروه پوانکره باشد، و سپس در نهایت ابرتقارن کردن عمل (9.9).

- [1] W. Rindler, "Special Relativity", 1960, Oliver and Boyd LTD., Edinburgh
- [2] M. Srednicki, "Quantum Field Theory", 2007, Cambridge University Press, University of California
- [3] J. Minahan, "Joe's Relatively Small Book of Special Relativity"
- [4] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations", 1995, Cambridge University Press, University of Texas
- [5] B. van Brunt, "The Calculus of Variations", 2006, Springer, USA
- [6] C. Itzykson, J-B. Zuber, "Quantum Field Theory", 2005, McGraw-Hill Inc., New York
- [7] L. Brink, M. Henneaux, "Principles of String Theory", 1988, Plenum Press, New York
- [8] J.Grundberg, J.Isberg, U.Lindström, H.Nordström, "On Smooth Particles and Strings", 31 May 1989, University of Stockholm, <http://inspirehep.net/record/287116>
- [9] J.Isberg, U.Lindström, H.Nordström, "Canonical Quantization of a Rigid Particle", 1989, University of Stockholm, <http://inspirehep.net/record/288425>

A. DERIVATIONS

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n = \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \mathcal{O}(x^3) = [x < 1] \approx \\
 &\approx \sqrt{1-x^2} \Big|_{x=0} + \frac{1}{2}(-2x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=0} x - \frac{\left(\frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \Big|_{x=0} \right)}{2} x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} - \frac{\partial L}{\partial r_j} &= 0 \\
 m \frac{d}{dt} \dot{r}_j &= 0 \\
 \ddot{r}_j &= 0
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -mc \frac{d}{dt} \frac{2\dot{x}^\alpha}{2\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^\alpha}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} &= \frac{\ddot{x}^\alpha \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} - \dot{x}^\alpha \frac{2\dot{x}^\nu \ddot{x}_\nu}{2\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}}{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = \frac{\ddot{x}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu \ddot{x}_\nu}{(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{3/2}} = 0 \\
 \ddot{x}^\alpha &= \frac{\dot{x}^\nu \ddot{x}_\nu}{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \dot{x}^\alpha = \frac{(\dot{x} \ddot{x})}{\dot{x}^2} \dot{x}^\alpha
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} &= \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda_{\alpha\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \stackrel{(7.1)}{\approx} (\delta^\alpha{}_\mu - \omega^\alpha{}_\mu) g_{\alpha\beta} (\delta^\beta{}_\nu - \omega^\beta{}_\nu) = \\
 &= (\delta^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} - \omega^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta}) (\delta^\beta{}_\nu - \omega^\beta{}_\nu) = \\
 &= \delta^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \delta^\beta{}_\nu - \delta^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \omega^\beta{}_\nu - \omega^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \delta^\beta{}_\nu + \omega^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \omega^\beta{}_\nu = \\
 &= g_{\mu\beta} \delta^\beta{}_\nu - g_{\mu\beta} \omega^\beta{}_\nu - \omega_{\beta\mu} \delta^\beta{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \approx g_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu} \\
 0 &= -\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu} \\
 \omega_{\mu\nu} &= -\omega_{\nu\mu}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
W_0 &= \frac{1}{2} \epsilon_{0\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma = \\
&= \frac{1}{2} (\epsilon_{0123} J^{12} P^3 + \epsilon_{0312} J^{31} P^2 + \epsilon_{0231} J^{23} P^1 - \epsilon_{0213} J^{21} P^3 - \epsilon_{0132} J^{13} P^2 - \epsilon_{0321} J^{32} P^1) = \\
&= \frac{1}{2} (J^{12} P^3 + J^{31} P^2 + J^{23} P^1 - J^{21} P^3 - J^{13} P^2 - J^{32} P^1) = \\
&= \frac{1}{2} ((J^{12} - J^{21}) P^3 + (J^{31} - J^{13}) P^2 + (J^{23} - J^{32}) P^1) \stackrel{(7.11)}{=} J^{12} P^3 + J^{31} P^2 + J^{23} P^1 \stackrel{(7.7)}{\rightarrow} \quad (A.5) \\
&\rightarrow J^{12} P^3 + a^2 P^1 P^3 - a^1 P^2 P^3 + J^{31} P^2 + a^1 P^3 P^2 - a^3 P^1 P^2 + J^{23} P^1 + a^3 P^2 P^1 - \\
&\quad - a^2 P^3 P^1 = [P^i P^j = P^j P^i] = \\
&= J^{12} P^3 + J^{31} P^2 + J^{23} P^1 + a^2 P^1 P^3 - a^1 P^2 P^3 + a^1 P^3 P^2 - a^3 P^1 P^2 + a^3 P^2 P^1 - \\
&\quad - a^2 P^1 P^3 = J^{12} P^3 + J^{31} P^2 + J^{23} P^1 = W_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{T}{2} \int d^2 \xi \sqrt{-g} g^{mn} \partial_m X^{\hat{\mu}} \partial_n X_{\hat{\mu}} \stackrel{(7.10)}{=} \\
&= \frac{T}{2} \int d^2 \xi \sqrt{-g} g^{mn} (\partial_m (x^\mu(\tau) + R \sigma y_\mu(\tau)) \partial_n (x^\mu(\tau) + R \sigma y_\mu(\tau)) + \partial_m \sigma \partial_n \sigma) = \\
&= \frac{T}{2} \int d^2 \xi \sqrt{-g} g^{mn} (\partial_m x^\mu(\tau) \partial_n x_\mu(\tau) + R \partial_m x^\mu(\tau) \partial_n (\sigma y_\mu(\tau)) + \\
&\quad + R \partial_m (\sigma y^\mu(\tau)) \partial_n x_\mu(\tau) + R^2 \partial_m (\sigma y^\mu(\tau)) \partial_n (\sigma y_\mu(\tau)) + \partial_m \sigma \partial_n \sigma) = \\
&= \frac{T}{2} \int d^2 \xi \sqrt{-g} (g^{mn} \partial_m x^\mu(\tau) \partial_n x_\mu(\tau) + 2R g^{mn} \partial_m x^\mu(\tau) \partial_n (y_\mu(\tau) \sigma) + \\
&\quad + R^2 g^{mn} \partial_m (y^\mu(\tau) \sigma) \partial_n (y_\mu(\tau) \sigma) + g^{mn} \partial_m \sigma \partial_n \sigma) \stackrel{(7.11)}{=} \quad (A.6) \\
&= \frac{T}{2} \int d\tau \sqrt{e^{-2}} \int_0^{2\pi R} d\sigma (-\dot{x}^2(\tau) - 2R \dot{x}(\tau) \dot{y}(\tau) \sigma + R^2 (-\dot{y}^2(\tau) \sigma^2 + e^2 y^2(\tau)) + e^2) = \\
&= -\frac{T}{2} \int \frac{d\tau}{e} \left(2\pi R \dot{x}^2 + 4\pi^2 R^3 \dot{x} \dot{y} + R^2 \left(\frac{8}{3} \pi^3 R^3 y^2 - 2\pi R e^2 y^2 \right) - 2\pi R e^2 \right) = \\
&= -\pi R T \frac{d\tau}{e} \left(\dot{x}^2 + 2\pi R^2 \dot{x} \dot{y} + \frac{4}{3} \pi^3 R^4 y^2 - R^2 e^2 y^2 - e^2 \right) = \\
&= -\pi R T \int \frac{d\tau}{e} (\dot{x}^2 + R^2 (2\pi \dot{x} \dot{y} - e^2 y^2) - e^2 + \mathcal{O}(R^4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_\mu &= \frac{dL}{d\dot{x}^\mu} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\dot{x}^\mu} \left(\sqrt{-\dot{x}^2} \left(m + \frac{1}{\alpha \dot{x}^2} \left[\dot{x}^2 y^2 + 2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2 \right] \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left(m \frac{d}{d\dot{x}^\mu} \sqrt{-\dot{x}^2} - \frac{d}{d\dot{x}^\mu} \left(\frac{\sqrt{-\dot{x}^2}}{\alpha (-\dot{x}^2)} \left[\dot{x}^2 y^2 + 2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2 \right] \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left(m \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \left(-\delta_\mu^\alpha \dot{x}_\alpha - \dot{x}^\alpha g_{\alpha\beta} \delta_\mu^\beta \right) - \frac{d}{d\dot{x}^\mu} \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{-\dot{x}^2}} \left[\dot{x}^2 y^2 + 2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2 \right] \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left(m \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} (-\dot{x}_\mu - \dot{x}_\mu) - \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\dot{x}^\mu} \left[-\frac{\dot{x}^2}{\sqrt{-\dot{x}^2}} y^2 + \frac{2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right] \right) = \\
&= \frac{m\dot{x}_\mu}{2\sqrt{-\dot{x}^2}} + \frac{1}{2\alpha} \left[-\frac{d}{d\dot{x}^\mu} \sqrt{-\dot{x}^2} y^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2\dot{y}_\mu - 2(\dot{x}y)y_\mu)(-\dot{x}^2)^{1/2} - (2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2)(-\dot{x}_\mu)(-\dot{x}^2)^{-1/2}}{-\dot{x}^2} \right] = \\
&= \frac{m\dot{x}_\mu}{2\sqrt{-\dot{x}^2}} + \frac{1}{2\alpha} \left[-y^2 \frac{(-\dot{x}_\mu)}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + \frac{2(\dot{y}_\mu - (\dot{x}y)y_\mu)}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + \frac{(2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2)\dot{x}_\mu}{(-\dot{x}^2)^{3/2}} \right] = \\
&= \frac{m\dot{x}_\mu}{2\sqrt{-\dot{x}^2}} - \frac{1}{2\alpha (-\dot{x}^2)^{3/2}} \left[(-1)(y^2(\dot{x}_\mu) + 2(\dot{y}_\mu - (\dot{x}y)y_\mu))(-\dot{x}^2) - (2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2)\dot{x}_\mu \right] = \\
&= \frac{m\dot{x}_\mu}{2\sqrt{-\dot{x}^2}} - \frac{1}{2\alpha (-\dot{x}^2)^{3/2}} \left[y^2 \dot{x}^2 \dot{x}_\mu + 2\dot{x}^2 \dot{y}_\mu - 2(\dot{x}y)\dot{x}^2 y_\mu - 2(\dot{x}\dot{y})\dot{x}_\mu + (\dot{x}y)^2 \dot{x}_\mu \right]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \frac{dL}{d\dot{y}^\mu} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\dot{y}^\mu} \left(\sqrt{-\dot{x}^2} \left(m + \frac{1}{\alpha \dot{x}^2} \left[\dot{x}^2 y^2 + 2\dot{x}\dot{y} - (\dot{x}y)^2 \right] \right) \right) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\dot{x}^2}}{\alpha \dot{x}^2} 2\dot{x}_\mu = \\
&= \frac{\sqrt{-\dot{x}^2} \dot{x}_\mu}{\alpha (-\dot{x}^2)} = \frac{\dot{x}_\mu}{\alpha \sqrt{-\dot{x}^2}}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi_1, \phi_2\} &= \left\{ P^2 + \alpha^{-2}, Pp + \frac{m}{2\alpha} - S_{bc}S^{bc} \right\} = -\left\{ P^2, S_{bc}S^{bc} \right\} = \\
&= -\left(\left\{ P_a, S_{bc}S^{bc} \right\} P^a + P_a \left\{ P^a, S_{bc}S^{bc} \right\} \right) = \\
&= -\left(\left[\left\{ P_a, S_{bc} \right\} S^{bc} + S_{bc} \left\{ P_a, S^{bc} \right\} \right] P^a + P_a \left[\left\{ P^a, S_{bc} \right\} S^{bc} + S_{bc} \left\{ P^a, S^{bc} \right\} \right] \right) \\
\{P_a, S_{bc}\} &= \frac{\partial}{\partial P_i} (P_a) \frac{\partial S_{bc}}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_i} (P_a) \frac{\partial S_{bc}}{\partial P_i} = \delta_a^i \frac{\partial}{\partial y_i} (P_{[b} y_{c]}) = \delta_a^i P_{[b} \delta_{c]}^i = P_{[b} \delta_{ac]} = \\
&= \frac{1}{2} (P_b \delta_{ac} - P_c \delta_{ab}) \Rightarrow \\
\Rightarrow \{\phi_1, \phi_2\} &= -\frac{1}{2} \left(\left[(P_b \delta_{ac} - P_c \delta_{ab}) S^{bc} + S_{bc} (P^b \delta_a^c - P^c \delta_a^b) \right] P^a + \right. \\
&\quad \left. + P_a \left[(P_b \delta_a^c - P_c \delta_a^b) S^{bc} + S_{bc} (P^b \delta^{ac} - P^c \delta^{ab}) \right] \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left[(P_b P_c - P_c P_b) S^{bc} + S_{bc} (P^b P^c - P^c P^b) + \right. \\
&\quad \left. + (P_b P_c - P_c P_b) S^{bc} + S_{bc} (P^b P^c - P^c P^b) \right] \\
&= -\left[(P_b P_c - P_b P_c) S^{bc} + S_{bc} (P^b P^c - P^b P^c) \right] = 0
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\{S_{\mu\nu}, H\} &= \{S_{\mu\nu}, \nu_1 \phi_1 + \nu_2 \phi_2\} = \nu_1 \{S_{\mu\nu}, \phi_1\} + \nu_2 \{S_{\mu\nu}, \phi_2\} \\
\{S_{\mu\nu}, \phi_1\} &= \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial y_i} \frac{\partial \phi_1}{\partial P_i} - \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial P_i} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} (P_{[\mu} y_{\nu]}) \frac{\partial}{\partial P_i} (P_\alpha P^\alpha + \alpha^{-2}) = \\
&= \left(P_{[\mu} \delta_{\nu]}^i \right) \left(\delta_\alpha^i P^\alpha + P_\alpha g^{\alpha\beta} \delta_\beta^i \right) = 2 P_{[\mu} \delta_{\nu]}^i P^i = 2 P_{[\mu} P_{\nu]} = P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu = \\
&= P_\mu P_\nu (1 - 1) = 0 \\
\{S_{\mu\nu}, \phi_2\} &= \left\{ S_{\mu\nu}, Pp + \frac{m}{2\alpha} - S_{bc}S^{bc} \right\} = \{S_{\mu\nu}, Pp\} = \\
&= \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial P_i} (P_\alpha p^\alpha) - \frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial P_i} \frac{\partial}{\partial y_i} (P_\alpha p^\alpha) = P_{[\mu} \delta_{\nu]}^i \delta_\alpha^i p^\alpha = P_{[\mu} \delta_{\nu]}^i p^i = \\
&= P_{[\mu} p_{\nu]} \Rightarrow \\
\Rightarrow \{S_{\mu\nu}, H\} &= \nu_2 P_{[\mu} p_{\nu]}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\{J_{\mu\nu}, H\} &= \{M_{\mu\nu}, H\} + \{S_{\mu\nu}, H\} = \nu_1 \{M_{\mu\nu}, \phi_1\} + \nu_2 \{M_{\mu\nu}, \phi_2\} + \{S_{\mu\nu}, H\} \\
\{M_{\mu\nu}, \phi_1\} &= \{p_{[\mu} x_{\nu]}, P^2 + \alpha^{-2}\} = 0 \\
\{M_{\mu\nu}, \phi_2\} &= \frac{\partial M_{\mu\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_2}{\partial p_i} - \frac{\partial M_{\mu\nu}}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{[\mu} x_{\nu]}) \frac{\partial}{\partial p_i} \left(P^a p_a - \frac{m}{2\alpha} - S_{bc}S^{bc} \right) = \\
&= p_{[\mu} \delta_{\nu]}^i \left(P^a \delta_a^i - \frac{\partial}{\partial p_i} (P_{[b} y_{c]} P^{[b} y^{c]}) \right) = p_{[\mu} \delta_{\nu]}^i P^i = p_{\mu} p_{\nu]} \Rightarrow \\
\Rightarrow \{J, H\} &\stackrel{(A.10)}{=} \nu_2 p_{[\mu} p_{\nu]} + \nu_2 P_{[\mu} p_{\nu]} = \nu_2 (p_{[\mu} p_{\nu]} - p_{[\mu} p_{\nu]}) = 0
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
& [\phi_1, \phi_2] \stackrel{(A.9)}{=} -\{([P_\alpha, S_{\mu\nu}] S^{\mu\nu} + S_{\mu\nu} [P_\alpha, S^{\mu\nu}]) P^\alpha + \\
& \quad + P_\alpha ([P^\alpha, S_{\mu\nu}] S^{\mu\nu} + S_{\mu\nu} [P^\alpha, S^{\mu\nu}])\} \\
& [P_\alpha, S_{\mu\nu}] = [P_\alpha, P_{[\mu} y_{\nu]}] = [P_\alpha, P_{[\mu}] y_{\nu]} + P_{[\mu} [P_\alpha, y_{\nu]}] = -P_{[\mu} [y_{\nu}], P_\alpha] = -i P_{[\mu} g_{\nu]\alpha} \Rightarrow \\
& \Rightarrow [\phi_1, \phi_2] = i \{ (P_{[\mu} g_{\nu]\alpha} S^{\mu\nu} + S_{\mu\nu} P^{[\mu} g^{\nu]\alpha}) P^\alpha + P_\alpha (P_{[\mu} g_{\nu]}^\alpha S^{\mu\nu} + S_{\mu\nu} P^{[\mu} g^{\nu]\alpha}) \} \\
& P_{[\mu} g_{\nu]\alpha} S^{\mu\nu} P^\alpha = P_{[\mu} P_{\nu]} S^{\mu\nu} = [P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha] = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow [\phi_1, \phi_2] = 0
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
& [p_\mu, H] = v_1 [p_\mu, \phi_1] + v_2 [p_\mu, \phi_2] = \\
& \quad = v_1 [p_\mu, P^2 + \alpha^{-2}] + v_2 \left[p_\mu, Pp + \frac{m}{2\alpha} - S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \right] = \\
& \quad = -v_2 [p_\mu, S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}] = -v_2 (S_{\alpha\beta} [p_\mu, S^{\alpha\beta}] + [p_\mu, S_{\alpha\beta}] S^{\alpha\beta}) \\
& [p_\mu, S_{\alpha\beta}] = [p_\mu, P_{[\alpha} y_{\beta]}] = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow [p_\mu, H] = 0
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
& [W_{\mu\rho\sigma}, H] = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} [p_{[\mu} S_{\rho\sigma]}, H] = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} (p_{[\mu} [S_{\rho\sigma}], H] + [p_{[\mu}, H] S_{\rho\sigma}]) \stackrel{(A.13)}{=} \\
& \quad = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} p_{[\mu} [S_{\rho\sigma}], H] = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} p_{[\mu} (v_1 [S_{\rho\sigma}], \phi_1] + v_2 [S_{\rho\sigma}], \phi_2]) \\
& [S_{ab}, \phi_1] = [S_{ab}, P^2 + \alpha^{-2}] = [S_{\rho\sigma}], P^2] = [S_{ab}, P_c] P^c + P_c [S_{ab}, P^c] = \\
& \quad = -([P_c, S_{ab}] P^c + P_c [P^c, S_{ab}]) \stackrel{(A.12)}{=} -i (P_{[b} g_{c]a} P^c + P_c P_{[b} g^c_{a]}) = \\
& \quad = -i (P_{[b} P_{a]} + P_{[b} P_{a]}) = -2i P_{[b} P_{a]} = [P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha] = 0 \\
& [S_{ab}, \phi_2] = \left[S_{ab}, Pp + \frac{m}{2\alpha} + S_{dc} S^{dc} \right] = [S_{ab}, Pp] = [S_{ab}, P_\alpha] p^\alpha + P_\alpha [S_{ab}, p^\alpha] = \\
& \quad = -[P_\alpha, S_{ab}] p^\alpha + P_\alpha [p^\alpha, S_{ab}] \stackrel{(A.13)}{=} -i P_{[b} g_{\alpha a]} p^\alpha = -i P_{[b} p_{a]} \\
& \Rightarrow [W_{\mu\rho\sigma}, H] = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} p_{[\mu} v_2 [S_{\rho\sigma}], \phi_2] = -\frac{i v_2}{\sqrt{-p^2}} p_{[\mu} P_{\{\rho} p_{\sigma\}}] = -\frac{i v_2}{\sqrt{-p^2}} P_{\{\rho} p_{[\mu} p_{\sigma\}}] = \\
& \quad = -\frac{i v_2}{2\sqrt{-p^2}} P_{\{\rho} (p_\mu p_{\sigma\}} - p_{\sigma\}} p_\mu) = \frac{i v_2}{2\sqrt{-p^2}} P_{\{\rho} p_\mu p_{\sigma\}} (-1 + 1) = 0
\end{aligned} \tag{A.14}$$